

## 9.kafli: Að lesa logra og lograjöfnur

Segja má um logra að við notum þá ekki mikið í amstri daglegs lífs. Þannig þeir virka þeir frekar dularfullir við fyrstu sýn. Hvað gera þessir dularfullu log- og ln-takkar á reiknivélinni ?

### 9.1 10 - lograr

Það fyrsta sem gott er að vita er að logri  $\log$  þýðir veldi, nánar tiltekið veldi með grunntöluna 10 þ.e.  $10^x = \log 10^x = x$ .

**Frægustu lograrnir eru:**

$$10^1 = 10 \text{ þá er } \log 10 = 1$$

$$10^2 = 100 \text{ þá er } \log 100 = 2$$

$$10^3 = 1000 \text{ þá er } \log 1000 = 3$$

$$10^4 = 10000 \text{ þá er } \log 10000 = 4$$

$\log$  takkinn á reiknivélinni þinni svarar spurningunni 10 í hvaða veldi er talan  $10^x$ ?

**Dæmi:**

$$\log 10 = 1 \text{ því að } 10^1 = 10$$

$$\log 100 = 2 \text{ því að } 10^2 = 100$$

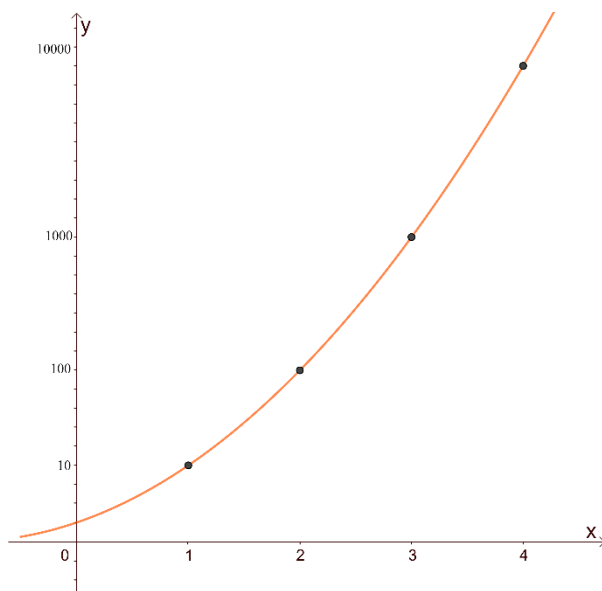
$$\log 1000 = 3 \text{ því að } 10^3 = 1000$$

$$\log 10000 = 4 \text{ því að } 10^4 = 10000$$

Oft er talað um veldisvöxt t.d 10 í veldinu  $x$   $10^x$ . Ef við teiknum upp veldisfallið í hnitakerfi sést vel hversu hratt fallið vex. Búum til gildistöflu:

<b>x</b>	<b>f ( x ) = 10<sup>x</sup></b>	<b>y</b>
1	f ( 1 ) = 10 <sup>1</sup>	10
2	f ( 2 ) = 10 <sup>2</sup>	100
3	f ( 3 ) = 10 <sup>3</sup>	1000
4	f ( 4 ) = 10 <sup>4</sup>	10000

Teiknum nú fallið inn í hnitakerfið



Þú sérð hversu hratt ferillinn vex upp á við. Oft er talað um veldisvöxt.

Þessum ferli er lóg takkinn að lýsa á reiknivélinni.

**Dæmi:**

$$\log 9 = 0,9542 \text{ þá er } 10^{0,9542} = 9$$

$$\log 90 = 1,9542 \text{ þá er } 10^{1,9542} = 90$$

$$\log 900 = 2,9542 \text{ þá er } 10^{2,9542} = 900$$

$$\log 9000 = 3,9542 \text{ þá er } 10^{3,9542} = 9000$$

Fróðlegt er að bera saman þessar niðurstöður og myndina af lografallinu

Á neðra borði reiknivélarinnar í gegnum SHIFT-takkann kemur skipunin  $10^x$  sem er andhverfuskipun fyrir  $\log$  takkann.

**Dæmi:**

$$\log 100 = 2 \text{ þá getur þú gert:}$$

$$\text{SHIFT log} = 10^x = 10^2 = 100.$$

Það má því segja að log takkinn á reiknivélinni sé uppflettitakki sem þú getur spurt um hvaða veldi af 10 talan hafi.

**Dæmi:**

$$\log 110 = 2,041392685$$

$$\text{sem þýðir að } 10^{2,041392685} = 110$$

Einnig er í gegnum **SHIFT**-takkann hægt að nálgast á reiknivélinni skipunina  $10^x$  þá get ég spurt reiknivélina um allar tölur í  $x$ -ta veldi með grunntöluna 10.

**Dæmi:**

**SHIFT log =  $10^x$  Athugum töluna  $10^{2,041392685} = 110$ .**

**10 í veldinu  $2,041392685 = 110$ .**

Segja má að þetta sé eins og hringur.

**log 100 = 2      og      Shift log 2 = 100.**

**Log 1000 = 3      og      Shift log 3 = 1000**

## 9.2 Náttúrulegir lograr

Það eru tvö lograkerfi á reiknivélinni þinni. Annars vegar er 10 logrinn log takkinn og hinsvegar náttúrulegi logrinn ln-takkinn sem er í raun alveg eins nema grunntalan er ekki 10 heldur hið dularfulla  $e = 2,7182818281\dots$ , sem þú finnur á reiknivélinni þinni, **SHIFT ln e 1 =**. Grunntalan er sem sagt á neðra borði reiknivélarinnar. Í menntaskóla var mér sagt að náttúrulegi logrinn kæmi í ljós í efnaferlum í náttúrunni. Með náttúrulegum logra getur þú skrifað allar tölur sem veldi af grunntölunni  $e^x$ . Sjá meðfylgjandi dæmi.

**Dæmi:**

Það þýðir að ég get skrifað töluna  $= e^{4,605170186}$

$\ln 100 = 4,605170186$

Eða  $2.71821828^{4,605170186} = 100$

Þannig getur þú á reiknivélinni þinni umskrifað allar tölur sem veldi bæði með grunntöluna 10 og e. Í raun er hægt að skrifa allar tölur sem veldi með hvaða grunntölu sem er, t.d.  $2^x$ ,  $5^x$  eða  $12^x$ . Reyndar er hægt að nota 10 logrann, sem túlk á milli veldakerfa. Skoðum það ásamt þremur lograreglum.

## 9.3 Lograreglur

Lograreglurnar eru þrjár. Gott er að rifja upp að: log = veldi. Því má í raun segja að lograreglurnar séu veldareglur. Oft er gott að læra af samanburði. Berum nú saman veldareglurnar og lograreglurnar.

### 9.3.1 Regla 1

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

þar sem margfeldi talna í veldi er í raun samlagning á veldaplaninu.

$$\log ( A \cdot B ) = \ln A + \ln B$$

þar sem margfeldi er samlagning veldanna.

**Dæmi:**

Þetta má sannreyna með reiknivélinni

$$\log 20 + \log 5 = 2 \quad \text{því að} \quad 10^2 = 100$$

### 9.3.2 Regla 2

$$a^x / a^y = a^{x-y}$$

þar sem deiling talna í veldi er í raun frádráttur á veldaplaninu.

$$\log (A / B) = \log A - \log B$$

þar sem deiling er frádráttur veldanna.

**Dæmi:**

$$\log 200 - \log 2 = \log 200 / 2 = \log 100 = 2$$

Þetta má sannreyna á reiknivélinni.

$$\log 200 - \log 2 = 2 \quad \text{þar sem} \quad 10^2 = 100$$

### 9.3.3 Regla 3

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

þar sem veldi í veldi er margfeldi.

$$\log A^y = y \cdot \log A$$

þar sem veldi í veldi er margfeldi.

**Dæmi:**

$$\log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 0,903089987$$

$$\log 8 = 0,903089987 \quad \text{því að } 10^{0,903089987} = 8$$

Veldareglur og um leið lograreglur eru svolítið snúnar.

1. Margföldun þýðir samlagning.

$$\log (A \cdot B) = \log A + \log B$$

2. Deiling þýðir frádráttur.

$$\log ( A / B ) = \log A - \log B$$

3. Veldi í veldi þýðir margfeldi.

$$\log A^y = y \cdot \log A$$

Alveg eins má skrifa veldareglurnar fyrir nattúrulegan logra.

$$1. \ln ( A \cdot B ) = \ln A + \ln B$$

$$2. \ln ( A / B ) = \ln A - \ln B$$

$$3. \ln A^y = y \cdot \ln A$$

Það sem er flott við logra er að með aðstoð þeirra getum við leyst jöfnur sem eru óleysanlegar á talnapaninu. Reyndar með þeirri snjöllu aðferð að setja veldaplanið niður á talnapanið og leysa jöfnuna þar.



## 9.4 Lograjöfnur

Hægt er að nota lograreglurnar til þess að leysa jöfnur sem annars væru óleysanlegar.

### Dæmi:

$$2^x = 5$$

Hægt er að sjá út frá heiltöluveldunum að

Setja log

$2^2 = 4$  og  $2^3 = 8$  Þannig að svarið er á

í báðar hliðar.

milli 4 og 8.

$$\log 2^x = \log 5$$

Þá er hægt að nota lograreglu 3.  $\log A^y = y \log A \rightarrow$

$$x \cdot \log 2 = \log 5 \quad \text{Leysa fyrir } x.$$

$$x = \log 5 / \log 2$$

$$x = 2,321928095$$

Prófun:  $2^{2,321928095} = 5$

Segja má að þú getir fundið veldi með grunntöluna 2 með aðstoð 10 logra.  $2^x = A$ .

**Dæmi:**

$$4 \cdot 3^{2x} = 9 \quad \text{Deila með 4 í gegnum jöfnuna}$$

$$3^{2x} = 9 / 4 = 2,25 \quad \text{Setja log í báðar hliðar}$$

$$\log 3^{2x} = \log 2,25 \quad \text{Nota } \log A^y = y \cdot \log A$$

$$2x \cdot \log 3 = \log 2,25$$

$$x = \log 2,25 / 2 \cdot \log 3 \quad \text{Einangra fyrir x}$$

$$x = 0,369070246$$

$$\text{Prófun: } 4 \cdot 3^{2 \cdot 0,369070246} = 9$$

Skoðum nú lograjöfnu sem leyst er með lograreglum 1 og 2.

**Dæmi:**

$$\log x = \log 6 + \log 12 \quad \text{Regla 1 } \log A + \log B = \log A \cdot B$$

$$\log x = \log 6 \cdot 12$$

$$\log x = \log 72 \quad \text{Tekið log úr báðum hliðum}$$

$$x = 72$$

Prófun á reiknivél.

$$\log 72 = 1,857332496 \quad \text{og} \quad \log 6 + \log 12 = 1,857332496$$

Hér er annað dæmi.

**Dæmi:**

$$\log x = \log 100 - \log 4 \quad \text{Regla 2 } \log A - \log B = \log A / B$$

$$\log x = \log 100 / 4 = \log 25$$

$$\log x = \log 25 \quad \text{Taka log úr báðum hliðum}$$

$$x = 25$$

$$\text{Prófun: } \log 25 = 1,397940009 \text{ og } \log 100 - \log 4 = 1,397940009$$

## 9.5 Vísisföll

Vísisföll sem eðlilega ættu að heita „veldisvísisföll“ eru t.d. hjá jöfnu beinnar línu  $y = hx + b$ . Þá er  $x$ -ið á veldaplaninu þannig að veldajafnan verður  $y = ax$ . Segja má að við séum búin að skoða veldajöfnurnar.

$$10^x = \log \text{ og } e^x = \ln$$

Skoðum nú tvær veldajöfnur:

$$y = 2^x \text{ og } (1/2)^x$$

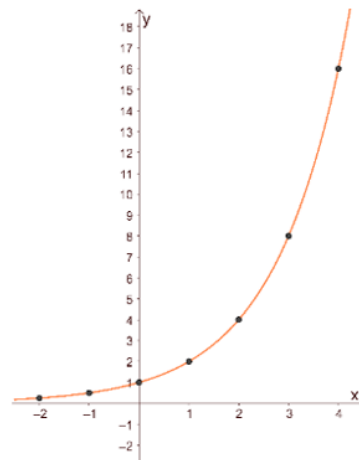
Ég minni á að veldisvöxturinn ( ferillinn ) fer hægt af stað og vex svo hratt meira að segja mjög hratt.

### Dæmi:

Kanna feril fallsins  $y = 2^x$

Búum til gildstöflu og reiknum fallið

x	$y = 2^x$	y
-2	$y = 2^{-2}$	0,25
-1	$y = 2^{-1}$	0,5
0	$y = 2^0$	1
1	$y = 2^1$	2
2	$y = 2^2$	4
3	$y = 2^3$	8
4	$y = 2^4$	16



Nokkur atriði sem einkenna ferilinn  $y = 2^x$

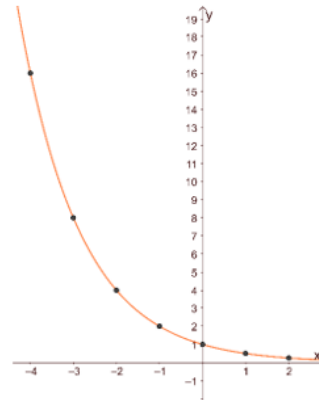
1. Hann sker y - ásinn í  $(0,1)$ , því  $a^0 = 1$
2. Hann vex mjög hratt til hægri, í + áttina, t.d. er  $2^{10} = 1024$
3. Hann myndar aðfelli að x - ás til vinstri í mínusáttina

### Dæmi:

Kanna feril fallsins  $y = (1/2)^x$

Búum til gildistöflu og teiknum fallið

x	$y = (1/2)^x$	y
-4	$y = (1/2)^{-4}$	<b>16</b>
-3	$y = (1/2)^{-3}$	<b>8</b>
-2	$y = (1/2)^{-2}$	<b>4</b>
-1	$y = (1/2)^{-1}$	<b>2</b>
0	$y = (1/2)^0$	<b>1</b>
1	$y = (1/2)^1$	<b>0,5</b>
2	$y = (1/2)^2$	<b>0,25</b>



Nokkur atriði sem einkenna ferilinn  $y = (1/2)^x$

1. Hann sker y - ásinn í  $(0,1)$  því að  $a^0 = 1$
2. Hann vex mjög hratt til vinstri, í mínusáttina, t.d.  $(1/2)^{-10} = 1024$
3. Hann myndar aðfella að x - ás til hægri, í plúsáttina

Það má segja að það að hugsa stærðfræðireglurnar og tölurnar á veldaplaninu sé ný og öðruvísi nálgun en að vinna á talnaplaninu  $a^n$  þar sem a er talnaplanið og  $n$  er veldaplanið. Reglur umbreytast eftir því hvort planið þú ert að horfa á. Því má segja að lograkerfin  $\log$  og  $\ln$  séu nokkuð sérstök. Það er von mín að þú hafir skilið þetta vel og sért orðin/n logralæs. Það er heillandi að skilja nýjan heim tákna og reglna „lograheiminn“.

## 9.6 Hugtakaskrá

e: Grunntala náttúrulegra lograkerfisins.  $e^1 = 2,71828182$

ln: Náttúrulegur logri. Takki á reiknivélinni

ln veldareglur: Þær eru þrjár:

$$1. \ln ( A \cdot B ) = \ln A + \ln B$$

$$2. \ln ( A / B ) = \ln A - \ln B$$

$$3. \ln A^y = y \cdot \ln A$$

log: 10 logri. Takki á reiknivélinni

Lograreglurnar: Þær eru þrjár:

$$1. \log ( A \cdot B ) = \log A + \log B$$

$$2. \log ( A / B ) = \log A - \log B$$

$$3. \log A^y = y \cdot \log A$$

Lograr: Kerfi þar sem hægt er að skrifa allar tölur sem veldi með grunntöluna 10 eða e

Lograjöfnur: Jöfnur sem leystar eru með aðstoð logra og logareglna

Náttúrulegir lograr: Lograr = ln með grunntöluna  $e = 2,718281828..$

10 logri: Lograkerfi með grunntöluna 10  $\log A = 10^x$

Veldisvöxtur: Ferill sem vex hægt í byrjun en fer síðan hraðvaxandi

Veldisföll:  $y = a^x$

Veldareglur:

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$2. a^x / a^y = a^{x-y}$$

$$3. (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$