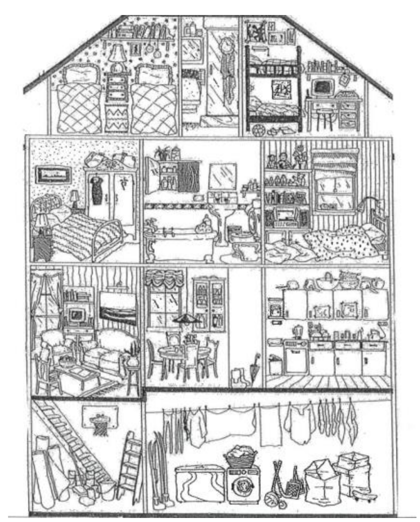
7.kafli: Að lesa jöfnur í hnitakerfinu III deildun/afleiða/stofnfall/heildi

Þegar nemendur byrja í framhaldsskóla breytist stærðfræðin úr reglunámi þar sem verið er að læra algebru- og rúmfræði reglur yfir í nám með jöfnur í hnitakerfinu. Ég er ekki viss um að nemendur nýútskrifaðir úr 10 bekk grunnskóla geti lýst því hvað bíður þeirra í stærðfræði framhaldsskólans hvað þá á raungreinabrautunum. Þar er unnið með jöfnuna f(x) á fjórum mismunandi plönum eða hæðum þar sem hver hæð hefur mjög sérhæfðar reglur sem hafa mjög sérhæft hlutverk. Í það minnsta áttaði ég mig ekki á þessu í mínu menntaskólanámi. Tökum myndlíkingu af húsi á fjórum hæðum þar sem hver hæð hefur sitt sérhæfða hlutverk:

Mynd:

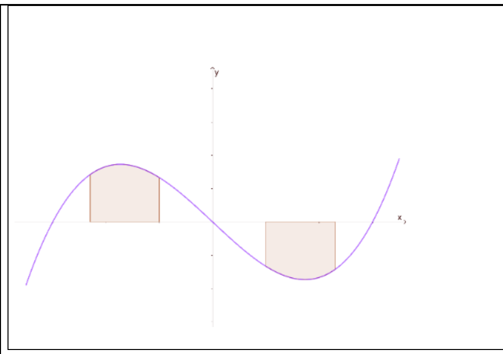
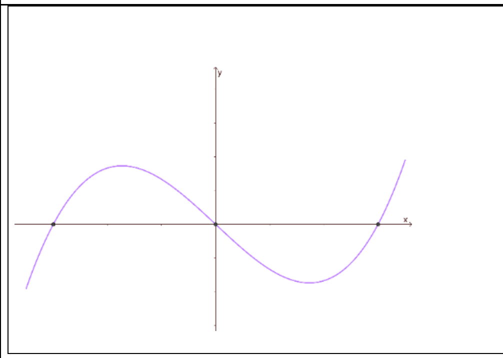
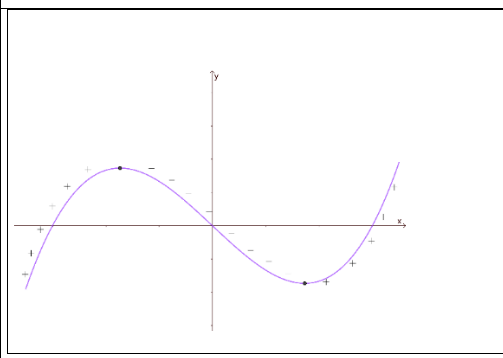
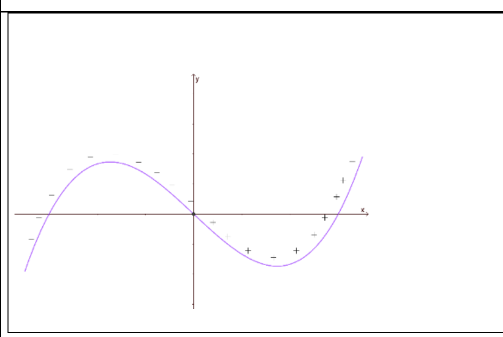


Ef ég reyni að lýsa þessum fjórum hæðum í hnitakerfinu og hlutverki hverrar hæðar fyrir sig má segja að þessi heildarmynd vilji týnast í dagsins önn. Sjá betur mynd hér á eftir.

F(x) = hækkaða formið = $\frac{x^4}{4}$ = heildi finnur flatarmál
f(x) = almenna formið x^3 = finnur punktana (x,y) = ferilinn
f´(x) = lækkaða formið = afleiðan = $3x^2$ = finnur hallatölur
f´´(x) = tvílækkaða formið = önnur afleiða = 6x = finnur stefnu

Þetta er ef til vill of mikið að melta í einu. Svo gott væri að skoða rólega og vandlega hverja hæð fyrir sig og þær reglur sem gilda á hverri hæð. Athugaðu að við erum alltaf að skoða sama ferilinn en hver hæð vinnur með mjög sérhæfðar upplýsingar um hann.

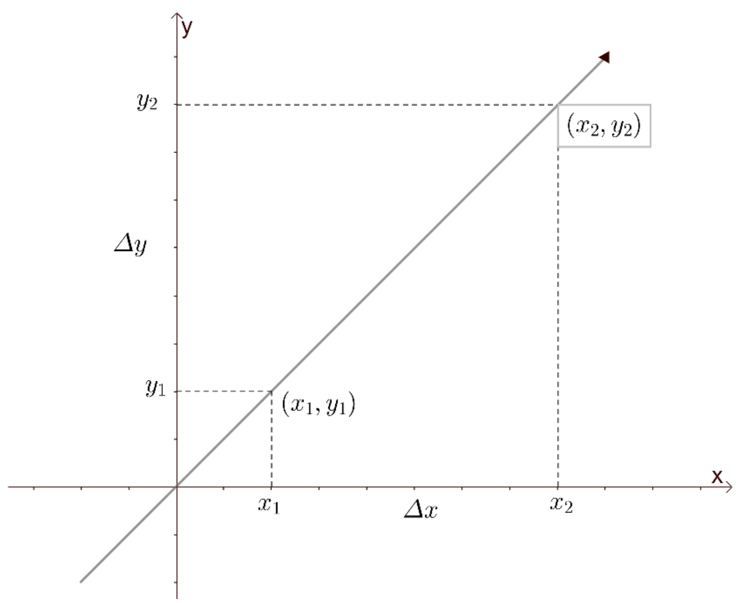
Mynd: Hinar fjórar hæðir hnitakerfisins

F(x) = heildi		finnur flatarmál undir ferlininum á milli a og b
f(x) = almenna formið. Gefur punktana sem mynda ferilinn		gefur skurðpunkta ferilsins við x - ásinn, þar sem f(x) = 0
f´(x) = lækkaða formið = afleiðan		gefur hallatölur og f´(x) = 0 gefur hágildi og lággildi ferilsins
f´´(x) = gefur stefnu og beygjuskil		gefur stefnu: uppsveigt eða niðursveigt. f´´(x) = 0 þar eru beygjuskil

7.1 Um hallatöluna og skilgreiningu á afleiðu

Skoðum nú fyrst hallatölu beinnar línu í gegnum punktana (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

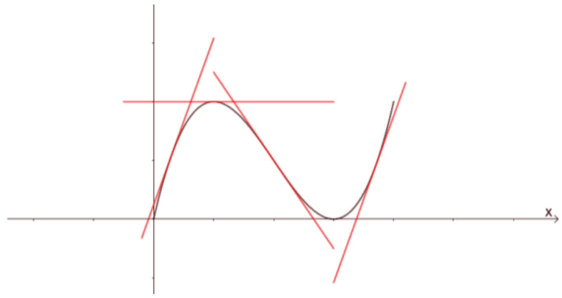
Mynd:



Hallatalan = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Þetta er hallatöluformúlan fyrir beina línu en þegar ferillinn er boginn en ekki bein lína þá vandast málið.

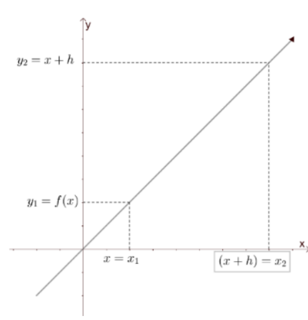
Mynd:



Eins og sést á þessari mynd er hallatalan síbreytileg í hverjum punkti og í raun má segja að þessiferill hafi óteljandi margar hallatölur eða eina í hverjum punkti. Væri ekki heillandi að reikna út hallann í hverjum af þessum óteljandi punktum? Merkilegt er að með afleiðunni = f´(x) er það hægt.

Skoðum hallatöluna aðeins betur eða þá útgáfu af hallatöluformúlunni sem heitir afleiða einnig nefnd diffurkvóti. Það sem gerist núna hefur mér alltaf fundist skrítið og sérstakt að útskýra. Segja má að jafnan f(x) sé dregin í gegnum hallatöluskilgreininguna og fari þá að gefa út hallatölur í stað punkta og nefnist þá f´(x) = afleiðan.

Mynd:



Þá verður: h = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = f´(x) = $\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$

Ef h stefnir á 0 sem er táknað lim h→0, þá færðu í raun út hallatöluna í x.

Reglan fyrir afleiðu er þá: f´(x) = lim h→0 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

og hún líkist hallatöluformúlunni h = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ekki neitt. Skoðum nú hvað gerist þegar jafnan f(x) = x2 er sett inn í hallatöluformúluna og út kemur f´(x) = 2x.

	x	$f(x) = x^2$	y	
x_1	x	$f(x) = x^2$	x^2	$= y_1$
x_2 =	(x+h)	$f(x+h)^2$	$(x+h)^2$	$= y_2$

Setjum þá inn í hallatöluformúluna:

h = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = f´(x) = lim x→0 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Dæmi:

Margfalda saman svigana

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} = \frac{(x+h)(x+h) - x^2}{h} =$$

Taka h út fyrir sviga

$$f'(x) \lim_{h\to 0} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} =$$

$$f'(x) \lim_{h\to 0} \; 2x + h = 2x$$

Það sést að jafnan $f(x) = x^2$ breyttist í $2x$ ef hún er dregin í gegnum hallatöluformúluna. Einnig breytist:

$f(x) = x^3$ í $f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^4$ í $f'(x) = 4x^3$

$f(x) = x^5$ í $f'(x) = 5x^4$

og svo framvegis

Þá verður til reglan: $f(x) = x^n \to f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

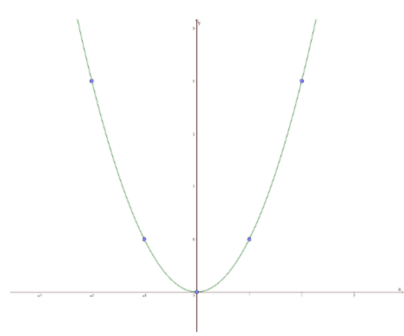
Þá fer veldið fram fyrir og breytist í margfeldi, veldið mínusast um einn og til verður hið lækkaða form jöfnunnar þar sem x^2 breytist í $2x^1$. Við þetta verður eðlisbreyting á jöfnunni og hún fer að gefa upplýsingar um hallatölur en ekki punkta (x,y) sem mynda ferilinn. Eins og svo oft er best að skilja reglur með því að skoða sýnidæmi. Skoðum tvö dæmi.

Fyrst $f(x) = x^2$ sem gefur okkur alla punkta ferilsins (x,y). Skoðum síðan $f´(x) = 2x$ sem gefur okkur hallatölur í öllum punktum (x,y) í hinum bogna ferli $f(x) = x^2$. Fyrst skulum við skoða sýnidæmi sem sýnir okkur hvernig við finnum punkta ferilsins og svo sýnidæmi sem sýnir okkur hvernig við finnum hallatölur í þessum punktum.

Dæmi:

Teiknaðu ferilinn $f(x) = x^2$

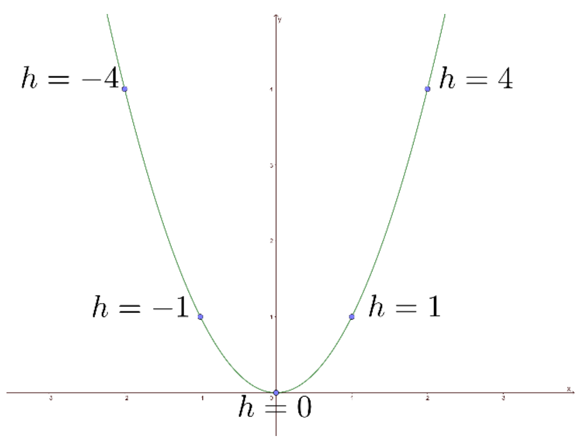
x	$f(x) = x^2$	y	(x,y)
-2	$f(-2) = (-2)^2$	4	(-2,4)
-1	$f(-1) = (-1)^2$	1	(-1,1)
0	$f(0) = (0)^2$	0	(0,0)
1	$f(1) = (1)^2$	1	(1,1)
2	$f(2) = (2)^2$	4	(2,4)



Hér á undan er búið að teikna ferilinn $f(x) = x^2$ inn í hnitakerfi. Nú skulum við finna hallatölurnar í þessum fimm punktum. Þá setjum við inn í jöfnuna $f'(x) = 2x$. Við búum til gildistöflu fyrir $f'(x) = 2x$ og fáum þá út hallatölurnar.

Dæmi:

x	f(x) = 2·x	y
-2	f(-2) = 2·(-2)	-4
-1	f(-1) = 2·(-1)	-2
0	f(0) = 2·0	0
1	f(1) = 2·1	2
2	f(2) = 2·2	4



Skoðum aðeins betur regluna: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ og fjögur tilbrigði við hana:

1) Þegar fundin er afleiðan af $f(x) = x^0$ gerist það að veldið 0 fer fram fyrir og breytist í margfeldi.

Þá verður $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = \underline{0}$

Því núll sinnum taflan $a \cdot 0 = 0$ gefur okkur alltaf = 0

Dæmi:

Finndu $f'(x)$ þegar $f(x) = 5$ **Ath: $x^0 = 1$**

$f(x) = 5 \rightarrow f(x) = 5 \cdot 1 \rightarrow f(x) = 5 \cdot x^0$

Þá er $f'(x) = 0 \cdot 5x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = \underline{0}$

Með öðrum orðum er afleiða af tölu alltaf = 0.

2) Þegar fundin er afleiðan af $f(x) = x^1$ þá verður veldið af

$f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$

og x - ið hverfur.

Dæmi:

Finndu $f'(x)$ ef $f(x) = 5x^1$

$f(x) = 5x^1 \rightarrow f'(x) = 1 \cdot 5x^{1-1} = 5x^0 = \underline{5}$

3) Reglan um afleiðu:

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ talar ekki neitt um brot aðeins um veldi, þannig að ef finna á afleiðu af broti þá þarf að breyta því í veldi með:

veldareglunni: $\frac{1}{x^n} = \frac{x^{-n}}{1}$

Skoðum dæmi um það.

Dæmi:

Finndu f´(x) ef f(x) = $\frac{1}{x^3}$

með veldareglunni: $\frac{1}{x^n} = \frac{x^{-n}}{1}$

Við umritum f(x) = $\frac{1}{x^3}$ **=** x^{-3} **og þá verður:**

f´(x) = $-3 \cdot x^{-3-1}$ **=** $\underline{-3x^{-4}}$ **eða** $\frac{1}{-3x^4}$

4) Reglan um afleiðu: $f(x) = x^n \rightarrow f´(x) = nx^{n-1}$ talar ekki neitt um rætur aðeins um veldi. Því þarf að breyta rótum í veldi með veldareglunni:

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$$

Skoðum nú dæmi um það:

Dæmi:

Finndu f´(x) ef f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$

Byrjum á að umrita $\sqrt[3]{x^2}$ **sem veldi með reglunni:** $\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$

þannig að f(x- 1) = $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ **og þá er: f´(x) =** $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$ **sem er:**

f´/x) = $\underline{\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}}$

Við höfum nú skoðað regluna:

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

frá öllum hliðum og gott væri að enda þá umræðu á þremur dæmum sem toga í alla anga reglunnar um afleiðu.

Dæmi: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Finndu $f'(x)$ ef:

$f(x) = 4x^5 + 0{,}5x^4 + 2x^2 + 5x^1 + 6x^0$

$f'(x) = 5\cdot 4x^4 + 4\cdot 0{,}5x^3 + 2\cdot 2x^1 + 1\cdot 5x^0 + 0\cdot 6x^{-1}$

$f'(x) = \underline{20x^4 + 2x^3 + 4x + 5 + 0}$

Dæmi: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Finndu $f'(x)$ ef:

$f(x) = 0{,}2x^{0,3} + 0{,}1x^{0,2}$

$f'(x) = 0{,}3\cdot 0{,}2x^{0,3-1} + 0{,}2\cdot 0{,}1x^{0,2-1}$

$f'(x) = \underline{0{,}6x^{-0,7} + 0{,}2x^{-0,8}}$

Dæmi: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Finndu $f'(x)$ ef $f(x) = \frac{2}{3x^2} + \sqrt[4]{x^2}$ Þá er $f(x) = \frac{2x^{-2}}{3} + x^{\frac{3}{4}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}(-3)x^{-2-1} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}$

$f'(x) = -2x^{-3} + \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}$

7.2 Hvað gerir afleiðan?

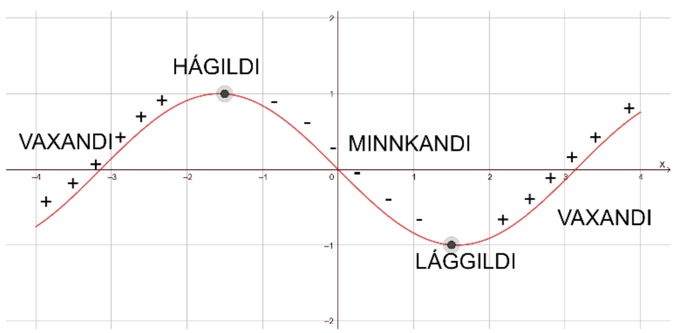
Afleiðan segir okkur til um hallatölur í hverjum punkti ferilsins. Þannig að ef:

hallatalan er pósitíf, þá er fallið vaxandi í lesáttina

hallatalan er negatíf, þá er fallið minnkandi í lesáttina

hallatalan = 0 þá er um að ræða hágildi eða lággildi

Mynd:



Þar sem afleiðan $f'(x) = 0$ verður hallatalan = 0 og þar verður hágildi og lággildi.

Dæmi: Finndu hágildi og lággildi fyrir $f(x) = x^2 - 4x - 12$

Þá er f´(x) = 2x + 4 = 0 þegar:

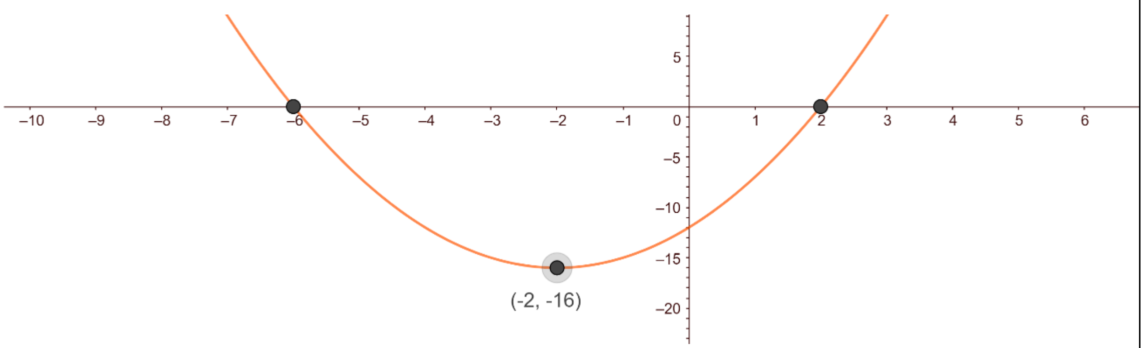
f´(x) = 2x = -4

f´(x) = x = -4 / 2 = -2

Lággildið er þá í punktinum x = -2 Finnum þá y - hnitið.

x	$f(x) = x^2 + 4x - 12$	y	(x,y)
-2	$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 12$ $f(-2) = 4 - 8 - 12$	- 16	(-2,-16)

Lággildið er þá í punktinum (2,-16) þar sem f´(x) = 0



Einnig er hægt að finna hallatölu í hverjum punkti fallsins:

Dæmi:

Hver er hallatalan fyrir x = 2 → f´(x) í punktinum (2,3)

í fallinu $f(x) = x^2 - 1$?

x	$f(x) = x^2 - 1$	y
(2 + h)	$f(x) = (2 + h)^2 - 1$	$(2 + h)^2 - 1$
2	$f(x) = 2^2 - 1$	3

Ath: $h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = f'(x) \lim h \to 0 \; \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(2) = \lim h \to 0 \; \frac{(2+h)^2 - 1 - 3}{2+h-2} \quad = \frac{(2+h)(2+h) - 4}{h}$

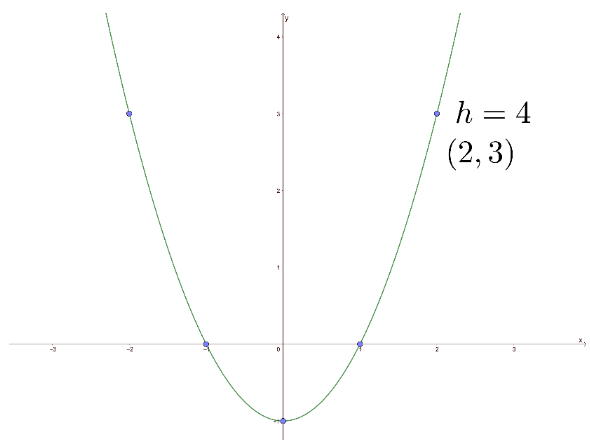
Taka h út fyrir sviga.

$f'(2) \lim h \to 0 \; \frac{4+2h+2h+h^2-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h}$

$f'(x) \lim h \to 0 \; \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4 + h = \underline{4}$ (h stefnir á 0)

Hallatalan er 4 þar sem x = 2

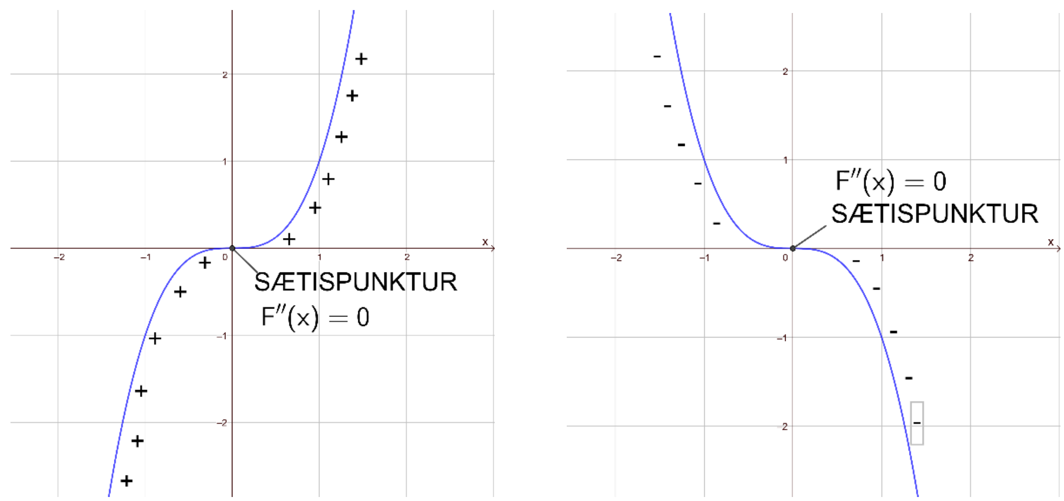
Í punktinum (2,3) er hallatalan = 4



Prófun: $f(x) = x^2 - 1$ þá er $f'(x) = 2x$ og $f'(2) = 2 \cdot 2 = \underline{4}$

Sætispunktur er afbrigði við hágildi og lággildi þar sem hallatalan verður = 0 í hæsta og lægsta punkti sjá mynd hér á undan. Ef um sætispunkt er að ræða, einnig kallaður stallur, þar er fallið annaðhvort sívaxandi eða síminnkandi nema í einum punkti = sætispunktinum. Þetta er best skýrt með mynd.

Mynd:



Segja má að sætispunkturinn sé nokkurs konar sambland af hágildi og lággildi.

Við höfum nú skoðað afleiðuna sem er nokkurskonar sérhæð í hnitakerfinu. Segja má að það séu til fjórar reglur til viðbótar um afleiðuna sem breytir f(x) í f´(x) og breytir þannig eðli jöfnunnar úr því að gefa upplýsingar um punkta (x,y) = f(x) yfir í það að gefa upplýsinar um hallatölur = f´(x). Lítum nú á þessar fjórar reglur.

7.3 Afleiðureglur

Við erum búin að skoða mjög vel regluna um afleiðu:

$f(x) = x^n \rightarrow f´(x) = n \cdot x^{n-1}$

Vonandi skilur þú vel eðli afleiðunnar. Það eru fjórar afleiðureglur til viðbótar sem vert er að skoða.

1) Afleiða margfeldis: Hnitakerfið er flókið og fullkomið kerfi og þar ríkja dularfullar reglur um afleiður sem segja okkur til um hallatölur í öllum punktum ferilsins. Ein slík er reglan um tvo þætti sem eru margfaldaðir saman og fyrir vikið virkar reglan stór og flókin, en hún lítur svona út:

Ef $f(x) = f(x) \cdot g(x)$ þá er $f´(x) = f(x) \cdot g'(x) + f´(x) \cdot g(x)$

$f´(x)$ = fyrsti þátturinn · afleiða seinni þáttar + afleiða fyrri þáttar · seinni þátturinn. Þessa reglu er erfitt að skilja án sýnidæmis.

Dæmi: Finndu $f´(x)$ ef $f(x) = x^5 \cdot x^3$

Ef $f(x) = f(x) \cdot g(x)$ þá er $f´(x) = f(x) \cdot g´(x) + f´(x) \cdot g(x)$

$f(x) = x^5$ og $f´(x) = 5x^4$ og $g(x) = x^3$ og $g´(x) = 3x^2$

Þá gefur innsetning:

$f´(x) = x^5 \cdot 3x^2 + 5x^4 \cdot x^3$

$f´(x) = 3x^7 + 5x^7 = \underline{8x^7}$

Prófun: Margfalda saman: $x^5 \cdot x^3 = \underline{x^8}$

Nota: $f(x) = x^n \rightarrow f´(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = x^8 \rightarrow f´(x) = \underline{8x^7}$

Skoðum nú annað sýnidæmi ögn flóknara.

Dæmi:

Reiknaðu $f'(x)$ ef: $f(x) = (3x^3 - 2x)(x^2 - 3)$

$f'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

$f(x) = (3x^3 - 2x)$ og $f'(x) = (9x^2 - 2)$

$g(x) = (x^2 - 3)$ og $g'(x) = 2x$

Innsetning gefur:

$f'(x) = (3x^3 - 2x)(2x) + (9x^2 - 2)(x^2 - 3)$

$f'(x) = 6x^4 - 4x^2 + 9x^4 - 27x^2 - 2x^2 + 6$

$f'(x) = \underline{15x^4 - 33x^2 + 6}$

Prófun: $f(x) = (3x^3 - 2x)(x^2 - 3) = 3x^5 - 9x^3 - 2x^3 + 6x$

$f'(x) = 15x^4 - 27x^2 - 6x^2 + 6 = \underline{15x^4 - 33x^2 + 6}$

2) **Afleiða kvótafalla**: = Deiling. Kvóti þýðir deiling þannig að kvótafall þýðir deilingajafna. Reglan lítur svona út:

Ef $f(x) = \dfrac{U}{V}$ Þá er $f'(x) = \dfrac{VU' - V'U}{V^2}$

sem trúlega er erfitt að skilja án sýnidæmis. Tökum tvö sýnidæmi, eitt létt og eitt flóknara.

Dæmi: U = 1

$f(x) = \frac{U}{V} \longrightarrow f'(x) = \frac{VU' - V'U}{V^2}$ U´= 0

Reiknaðu út f´(x) ef $f(x) = \frac{1}{x^4}$ V = x^4

$f'(x) = \frac{x^4 \cdot 0 - 4x^3 \cdot 1}{(x^4)^2}$ V´ = $4x^3$

$f'(x) = \frac{-4x^3}{x^8} = \underline{\frac{-4}{x^5}}$

Tökum nú annað sýnidæmi og ögn flóknara.

Dæmi: V = 3x

Reiknaðu f´(x) ef $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x}$ V´ = 3

$f(x) = \frac{U}{V} \longrightarrow f'(x) = \frac{VU' - UV'}{V^2}$ U = (x^2 - 1)

Innsetningin gefur: U´= 2x

$$f'(x) = \frac{3x \cdot 2x - (x^2 - 1) - 3}{3x^2} = \frac{6x^2 - x^2 + 1 - 3}{9x^2} = \frac{5x^2 - 2}{9x^2}$$

Þá eru eftir tvær litlar og einfaldar reglur um afleiðu.

3) <u>Afleiður vísisfalla:</u> Í veldisvísisfalli er x í veldastöðu. Það er ekki e·x heldur e^x. Reglan er svolítið sérstök eða:

$f(x) = e^x$ þá er $f'(x) = e^x$

en ef það er stuðull = k = (tala) fyrir framan x -ið fer talan framfyrir sem margfeldi.

$f(x) = e^{kx} \rightarrow f'(x) = k \cdot e^{kx}$

sem reyndar má einnig segja um:

$f(x) = e^{1x} \longrightarrow f'(x) = 1e^x = e^x$

Þannig að segja að þetta sé sama reglan. Skoðum nú sýnidæmi.

Dæmi:

Finndu $f'(x)$ ef $f(x) = 3e^{0,3x}$ Og finndu síðan $f'(2)$.

$f(x) = e^{kx} \longrightarrow ke^{kx}$

$f'(x) = 0,3 \cdot 3e^{0,3x}$

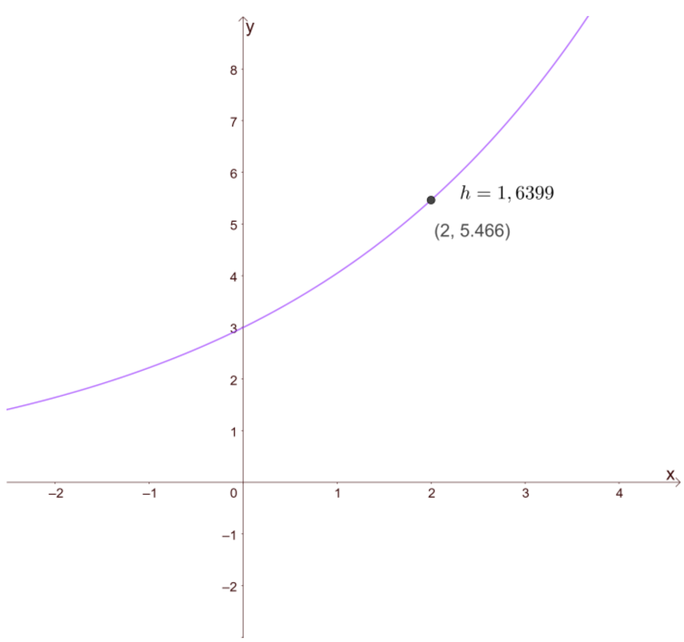
$f'(x) = \underline{0,9e^{0,3x}}$

$f'(2) = 0,9 \cdot e^{0,3 \cdot 2}$

$f'(2) = \underline{1,6399}$

Hallartalan er 1,6399

þegar x = 2 sjá mynd.



4) Afleiðan af a^x:

Reglan er: $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

Ef það er stuðull = (tala) fyrir framan x – ið þá lítur reglan svona út:

$f(x) = a^{kx} \rightarrow f'(x) = a^{kx} \cdot \ln x \cdot k$

Skoðum nú sýnidæmi:

Dæmi:

Finndu afleiðuna $f'(x)$ ef $f(x) = 150 \cdot 2^{4x}$

$f(x) = a^{kx} \rightarrow f'(x) = a^{kx} \cdot \ln x \cdot k$

$f'(x) = 150 \cdot 2^{4x} \cdot \ln 2 \cdot 4$

$f'(x) = \underline{600 \cdot 2^{4x} \cdot \ln 2}$

Ef k = 1 þá lítur reglan út svona:

$f(x) = a^{1 \cdot x} \rightarrow f'(x) = a^{1x} \cdot \ln a \cdot 1 = a^x \cdot \ln a$

Þannig má segja að þetta sé aðeins ein regla.

Við erum nú búin að skoða afleiðuna f´(x), sem segja má að sé alveg sér hæð í hnitakerfinu með sínar sér reglur og sér eiginleika. Það er von mín að þetta ferðalag um afleiðuhæðina hafi eflt skilning þinn á leyndarmálum hnitakerfisins.

7.4 Önnur afleiða

Önnur afleiðan hefur líka verið nefnd tvídiffrun eða hið tvílækkaða form jöfnunnar. Það er $f''(x)$. Þá er reglan sett aftur inn í afleiðu – regluna: $f(x) = x^n$ $\rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Dæmi:

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

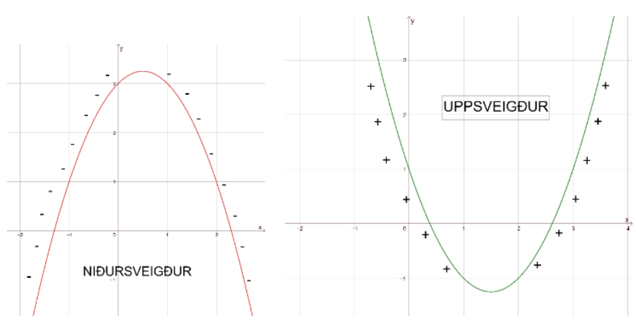
$f''(x) = 6x^1 = 6x$

Við þetta að jafnan er tvídregin í gegnum hallatöluskilgreininguna breytist eðli hennar enn á ný og segja má að það myndist ný hæð í hnitakerfinu, sem hefur allt aðra eiginleika en f(x) og f´(x), þ.e. nú fer jafnan að segja okkur hvort ferillinn sé að stefna upp eða niður.

Þar sem f´´(x) = (-) þar er ferillinn niðursveigður = á leiðinn niður í lesáttina.

Þar sem f´´(x) = (+) þar er ferillinn uppsveigður = á leiðinni upp í lesáttina.

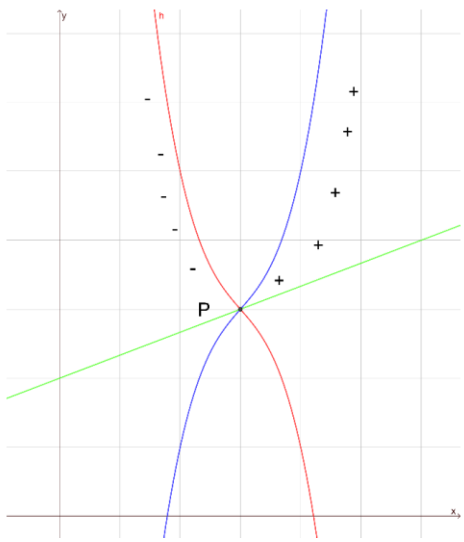
Mynd:



7.4.1 Beygjuskil

Þar sem ferillinn breytist úr því að vera uppsveigður í að vera niðursveigður eða öfugt, þar eru beygjuskil og þau verða þar sem f´´(x) = 0 þar verður beygjuskilapunkturinn þar sem ferillinn hættir að vera niður niðursveigður og verður uppsveigður eða öfugt.Þessi punktur er líka kallaður stallur. Sjá mynd.

Mynd:

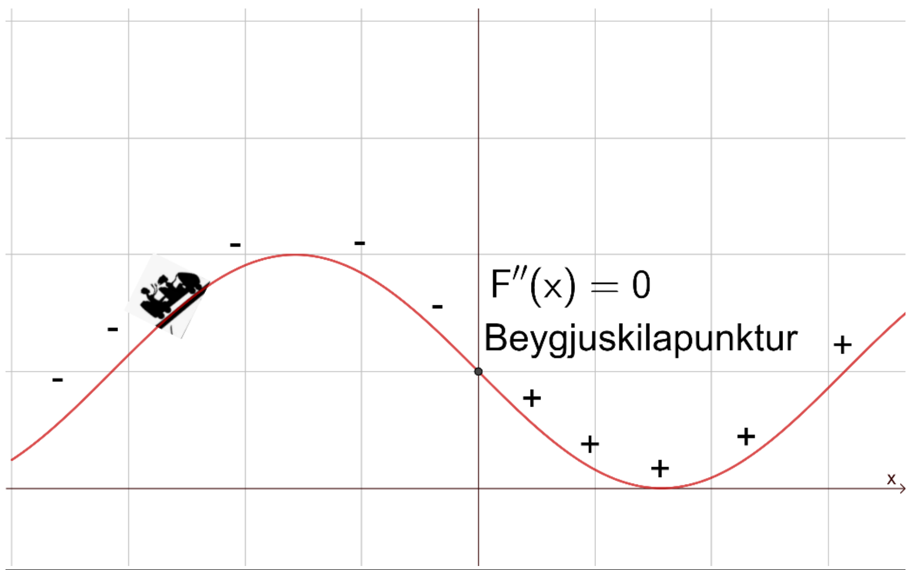


Línan l er bæði fyrir ofan og neðan ferilinn og gengur í gegnum beygjuskilapunktinn P.

Ein kröftugasta upplifun mín af beygjuskilum var þegar ég fór í fyrsta skipti í rússíbana. Það var um kvöld í myrkri og þegar rússíbanabrautin kippti rússíbananum úr því að vera að fara niður og í það að vera að fara upp fór maginn í mér upp í háls. Þar var beygjuskilapunkturinn.

Þar sem f´´(x) = 0 þar er beygjuskilapunkturinn fyrir ferilinn.

Mynd:



Best af öllu til að skilja afeiðuna og aðra afleiðu er að skoða sýnidæmi,   sem notar:

f(x) = Almenna formið til þess að finna punkta ferilsins =   (x,y)
f´(x) = Afleiðuna til þess að finna hallatölur í öllum punktum ferisins
f´´(x) = Aðra afleiðu til þess að finna stefnu ferilsins í öllum punktum ferilsins

Þetta verður því langt sýnidæmi á þremur hæðum.

Dæmi:

Gefið er fallið: $f(x) = x^3 - 3x + 3$

a. Teiknaðu ferilinn f(x) í hnitakerfið.

b. Finndu hágildi og lággildi = $f'(x) = 0$

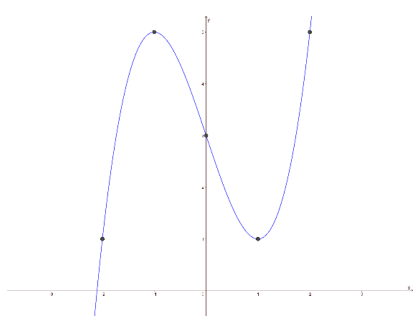
c. Finndu beygjuskil = $f''(x) = 0$

a. Teiknaðu ferilinn $f(x) = x^3 - 3x + 3$ í hnitakerfið.

Gildistafla gefur:

x	$f(x) = x^3 - 3x + 3$	y	(x,y)
-2	$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3$	1	(-2,1)
-1	$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3$	5	(-1,5)
0	$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 3$	3	(0,3)
1	$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3$	1	(1,1)
2	$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 3$	5	(2,5)

Þá lítur ferillinn svona út:



b. Finndu hágildi og lággildi ferilsins $f(x) = x^3 -3x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, þá er $3(x^2 -1) = 0$ og þá er $3(x - 1) (x + 1)$

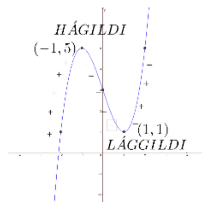
$x - 1 = 0$ og $x + 1 = 0$

$x = \underline{1}$ og $x = -\underline{1}$

Hágildi og lággildi eru í x = 1 og x = -1 Setja í gildistöflu. →

x	$f(x\ ) = x^3 - 3x + 3$	y	(x,y)
-1	$f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 3$	5	(-1,5)
1	$f(1) = (1)^3 - 3\cdot1 + 3$	1	(1,1)

Hágildispunktarnir eru: (-1,5) og (1,1).



c. Finndu beygjuskila-punktinn í ferlinum $f(x) = x^3 -3x + 3$

$f´(x) = 3x^2 -3$ og $f´´(x) = 6x = 0$

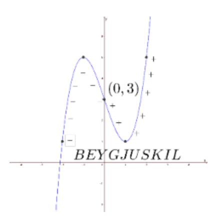
Þegar $f´´(x) = 0$

$6x = 0$ þá er $x = 0 / 6 = 0$ $f´´(x) = 0$ í $x = 0$

Til þess að finna beygjuskilapunktinn setjum við $x = 0$ í gildistöflu fyrir $f(x) = x^3 -3x + 3$

x	$f(x) = x^3 - 3x + 3$	y	(x,y)
0	$f(0) = 0^3 - 3\cdot0 + 3$	3	(0,3)

Beygjuskilapunkturinn er í <u>(0,3)</u>



Þetta sýnidæmi sýnir vel þessar þrjár hæðir í hnitakerfinu:

f(x) sem sýnir punktana = ferilinn

f´(x) sem sýnir hallatölurnar

f´´(x) sem sýnir stefnuna = upp / niðursveigt

Allan tímann erum við að vinna með sama ferilinn, en hin mismunandi form jöfnunnar f(x), f´(x) og f´´(x) gefa okkur mismunandi upplýsingar um ferilinn. Það er reynsla mín sem kennara að þegar jafnan fer að vinna á þremur plönum sé erfitt að hafa heildarsýn. Þrátt fyrir það er það von mín og trú að þú hafir skilið þetta allt mjög vel. Ef ekki má gjarnan segja setninguna: „Það er gott að lesa þangað til þú skilur.“ Einnig má segja: „Lestur verður ekki nám fyrr en þú skilur.“

7.5 Stofnfall, heildun og flatarmál undir ferlum

Eitt skrítnasta form jöfnunnar er heildun, þ.e að tegra almenna formið og út kemur stofnfallið F(x) sem ég vil kalla hið hækkaða form jöfnunnar, þar sem f(x) veldið er hækkað um einn og deilist með n + 1 samkvæmt reglunni:

$$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Eða með öðrum orðum, ef þú finnur afleiðuna af F(x) þá er hún f(x). Tökum lítið dæmi um þetta.

Dæmi:

Afleiðan af F(x) = $x^4 + x^3$ verður samkvæmt reglunni um afleiðu: f(x) = x^n → f´(x) = nx^{n-1}

f(x) = $\underline{4x^3 + 3x^2}$

Ef farið er til baka og búið til hið hækkaða form jöfnunnar samkvæmt reglunni:

f(x) = x^n → F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ Veldið + 1 og deila með þeirri tölu.

Dæmi:

Finndu stofnfall jöfnunnar: F(x) ef: f(x) = $4x^3 + 3x^2 + c$

Samkvæmt reglunni: F(x) = x^n $\longrightarrow$ f(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$F(x) = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + \frac{3x^{2+1}}{2+1} = \frac{4x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} = \underline{x^4 + x^3}$$

Skoðum aðeins betur tengslin á milli f(x) og F(x).

f(x) = x^1 → F(x) = $\frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$

f(x) = x^2 → F(x) = $\frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$

f(x) = x^3 → F(x) = $\frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4}$

f(x) = x^4 → F(x) = $\frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5}$

f(x) = x^5 → F(x) = $\frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6}$

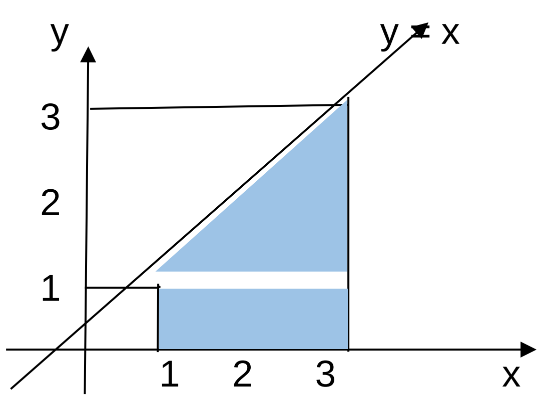
Þá kemur í ljós reglan:

$$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Það sem hið hækkaða form jöfnunnar gerir okkur kleift að gera er að reikna út flatarmál undir bognum ferli, nokkuð sem hin klassíska rúmfræði getur ekki gert, með því að finna stofnfallið = hið hækkaða form jöfnunnar og heilda það. Þá er hægt að nota stofnfallið til þess að finna flatarmál undir ferlinum. Skoðum nú sýnidæmi sem sýnir þetta undir beinni línu: y = x. Skoðum hvernig sama dæmi er reiknað: fyrst með rúmmálsreglunum og svo með reglum fyrir stofnfall og heildun.

Dæmi:

Reiknaðu flatarmál skyggða svæðisins undir línunni y = x á milli 1 og 3 Sjá mynd.



Flatarmál □ = 2·1 = 3 og flatarmál Δ = $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

Alls = □ + Δ = 2 + 2 = $\underline{4}$

Skoðum nú sama dæmi reiknað sem stofnfall með heildi. Þar sem við notum regluna:

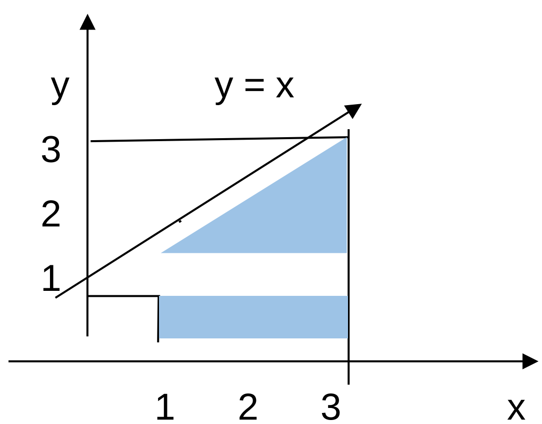
$$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Reglan til þess að finna flatarmálið undir ferlinum á milli: a = x = 1   og   b = x = 3

$$\int_a^b F(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dæmi:

Reiknaðu flatarmál skyggða svæðisins á milli x = 1 og x = 3 undir línunni y = x



$$f(x) = x^1 \longrightarrow F(x) = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_1^3 (x) = \left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right]_1^3 = \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right]_1^3 = \frac{8}{2} = 4$$

Skoðum nú dæmi sem ekki er hægt að reikna með klassískum reglum flatarmálsfræðinnar.

Dæmi:

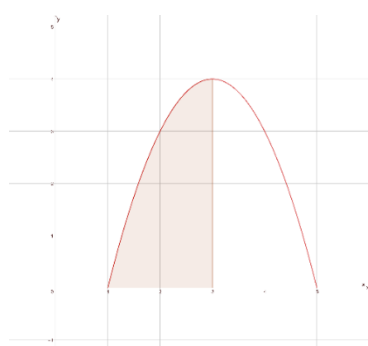
Reiknaðu flatarmálið á milli x – ás og ferilsins $-x^2 + 6x - 5$

milli x = 1 og x = 3

Teiknaðu ferilinn $-x^2 + 6x - 5$ inn í hnitakerfi. Gildistafla gefur:

x	f(x) = $-x^2 + 6x - 5$	y	(x,y)
1	f(1) = $-(1)^2 + 6(1) - 5$	0	(1,0)
2	f(2) = $-(2)^2 + 6(1) - 5$	3	(2,3)
3	f(3) = $-(3)^2 + 6(3) - 5$	4	(3,4)
4	f(4) = $-(4)^2 + 6(4) - 5$	3	(4,3)
5	f(5) = $-(5)^2 + 6(5) - 5$	0	(5,0)

Þá lítur ferillinn svona út:



Reiknaðu út flatarmál skyggða svæðisins:

Notum reglurnar: $f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ og

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

$$\int_1^3 (-x^2 + 6x - 5)dx = \left[\frac{-1}{3}\, x^3\ 3x^2 - 5x\right]_1^3 =$$

$$\frac{-1}{3}(3)^3 + 3(3)^2 - 5\cdot 3\ -\ \left(\frac{-1}{3}\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1\right) =$$

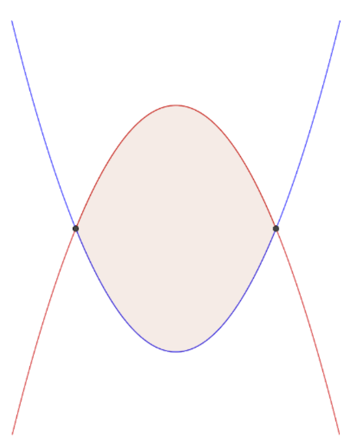
$$-9 + 27 - 15 + \frac{1}{3} - 3 + 5 =$$

$$32\frac{1}{3} - 27 = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$ = **flatarmálið.**

Þá erum við búin að kynnast flottustu flatarmálsformúlunni = hinu hækkaða form jöfnunnar $f(x) = x^n = F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Við skulum enda þessa umræðu um töfra hnitakerfisins á því að nota hið hækkaða form jöfnunnar F(x) til þess að finna flatarmál svæðis sem liggur á milli tveggja boginna ferla sem lítur út eins og skyggða svæðið á myndinni hér fyrir neðan.

Mynd:



Það skal játast að dæmið er nokkuð langt og í nokkrum þrepum. Þetta dæmi er ekki hægt að reikna með hefðbundnum rúmfræðiformúlum. Skoðum þetta:

Dæmi:

Reiknaðu flatarmálið sem af arkast af ferlunum:

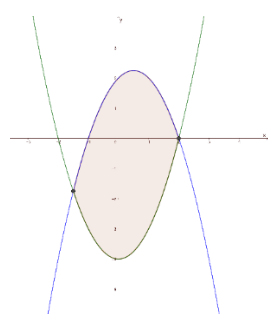
$f(x) = x^2 – 4$ og $f(x) = -x^2 + x + 2$

Gildistöflur færa okkur ferlana:

x	$f(x) = x^2 - 4$	y	(x,y)
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 4$	0	(-2,0)
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 4$	-3	(-1,-3)
0	$f(0) = 0^2 - 4$	-4	(0,-4)
1	$f(1) = 1^2 - 4$	-3	(1,-3)
2	$f(2) = 2^2 - 4$	0	(2,0)

x	$f(x) = x^2 + x + 2$	y	(x,y)
-2	$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 2$	4	(-2,4)
-1	$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 2$	0	(-1,0)
0	$f(0) = 0^2 + 0 + 2$	2	(0,2)
1	$f(1) = 1^2 + 1 + 2$	2	(1,2)
2	$f(2) = 2^2 + 2 + 2$	0	(2,0)

Teiknaðu ferlana inn í hnitakerfi:



Reiknaðu flatarmál skyggða svæðisins: →

Fyrst þarf að reikna út skurðpunkta ferlanna

$x^2 - 4 = -x^2 + x + 2$

$x^2 + x^2 + x - 4 - 2 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$ Þáttað með ágiskunarreglunni

$(2x + 3)(x - 2) = 0$ Núllþáttareglan gefur:

$2x + 3 = 0$ og $x - 2 = 0$

$2x = -3$ og $x = \underline{2}$

$X = \underline{-3/2}$

Finndu flatarmálið á milli ferlanna

Efri ferillinn – neðri ferillinn

$$F = \int_{\frac{-3}{2}}^{2} [-x^2 + x + 2 - (x^2 - 4)] =$$

$$\int_{\frac{-3}{2}}^{2} (-2x^2 + x + 6)\,dx = \left[\frac{2}{5}x^3 + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{\frac{-3}{2}}^{2} =$$

$$\frac{-16}{3} + 2 + 12 - \left(\frac{9}{4} + \frac{9}{8} - 9\right) = \frac{343}{24}$$

Við höfum nú lokið yfirferð um hnitakerfið og kynnst þessum mjög fullkomna regluheimi með sérhæfð plön með sér reglum fyrir hverja hæð hnitakerfisins. Í fyrri köflum um hnitakerfið er búið að gera almenna forminu góð skil og einnig að skoða einingahringinn. Í þessum kafla förum við upp fyrir almenna formið f(x) með heildin F(x) og niður fyrir almenna formið með afleiðunni f´(x) og annarri afleiðu f´´(x) eða tvílækkaða forminu.

F(x) = heildin = hækkaða formið

f(x) = almenna formið

f´(x) = afleiðan = lækkaða formið

f´´(x) = önnur afleiða = tvílækkaða formið

7.6 Hugtakalisti

Afleiða: Umritun hallatöluformúlunnar:

$$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} \quad \text{yfir á} \quad f'(x) = \lim h \to 0 \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Afleiðan af a^x: Afleiðureglur þar sem:

$$f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a \quad \text{og} \quad f(x) = a^{kx} \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a \cdot k$$

Afleiða kvótafalls: Afleiða jöfnu sem er samsett með deilingu:

$$f(x) = \frac{U}{V} \longrightarrow f'(x) = \frac{VU' - V'U}{v^2}$$

Afleiða margfeldis: Afleiða jöfnun sem er samsett með margföldun:

$$f(x) = U \cdot V \rightarrow U \cdot V' + U' \cdot V$$

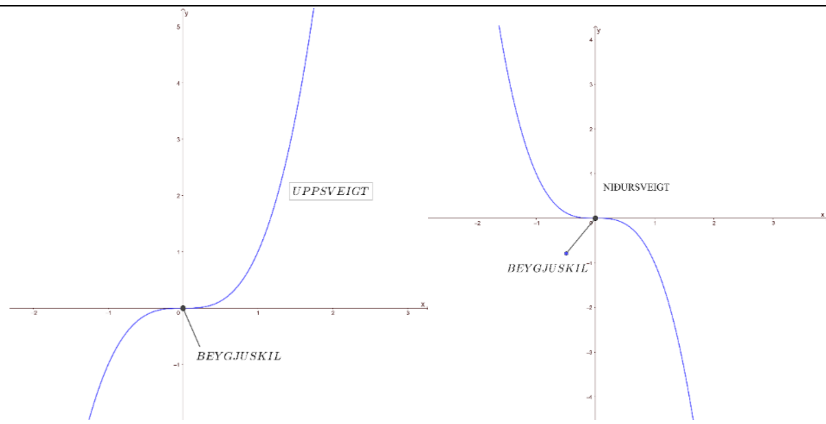
Afleiða vísisfalls: Afleiðuregla þar sem:

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \quad \text{og} \quad f(x) = e^{kx} \rightarrow f'(x) = k \cdot e^{kx}$$

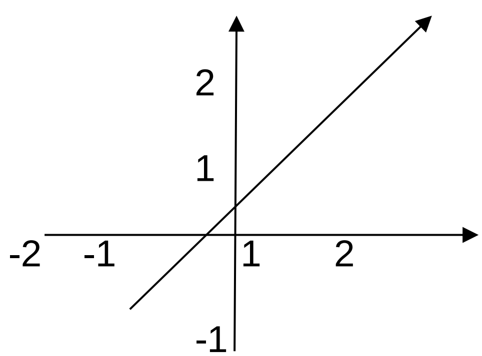
Afleiðan af x^n: Afleiðuregla þar sem veldið n fer fram fyrir sem margfeldi og mínusast um einn:

$\mathbf{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

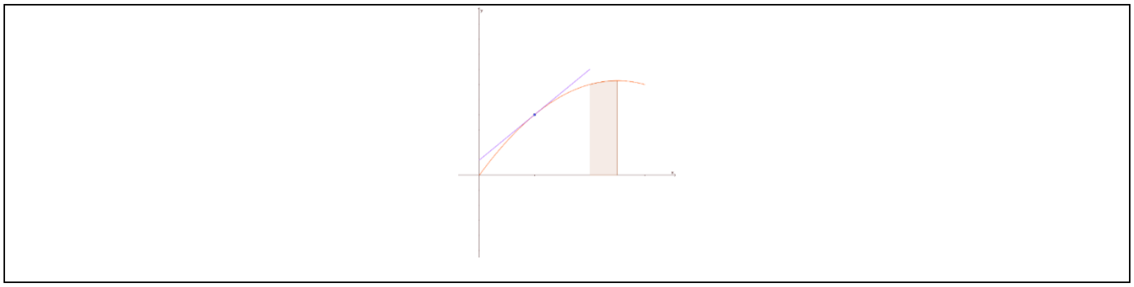
Beygjuskil – Beygjuskilapunktur: Beygjuskilapunkturinn er þar sem $f''(x) = 0$ Þar breytir fallið um stefnu. Sjá mynd:



Bein lína y = x:

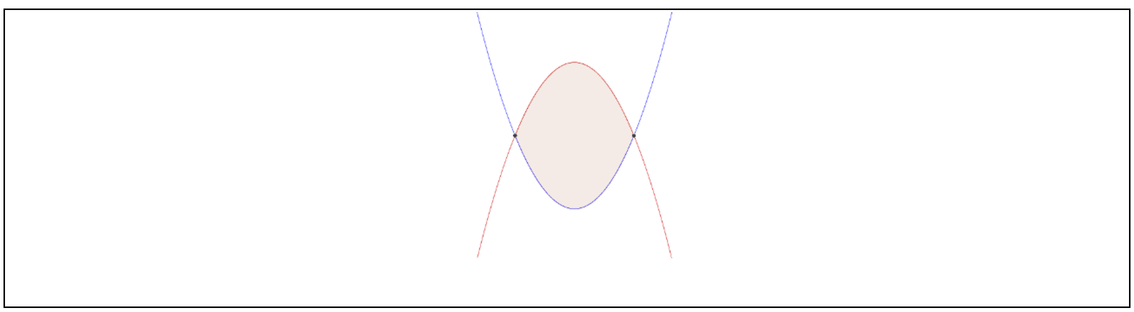


Boginn ferill: Ekki er hægt að finna hallatölu í bognum ferli, nema með afleiðu og ekki er hægt að finna flatarmál undir bognum ferli, (skyggða svæðið), nema með heildun.



Ferill falls: Í almenna forminu f(x) getur þú fundið alla punkta ferilsins (x,y) í gildistöflu og þannig teiknað ferilinn inn í hnitakerfið

Flatarmál milli ferla: Flatarmál skyggða svæðisins er aðeins hægt að reikna með heildi



F(x): Heildun = hið hækkaða form jöfnunnar, reiknar flatarmál

f(x): Hið almenna form jöfnunnar finnur punkta ferilsins (x,y)

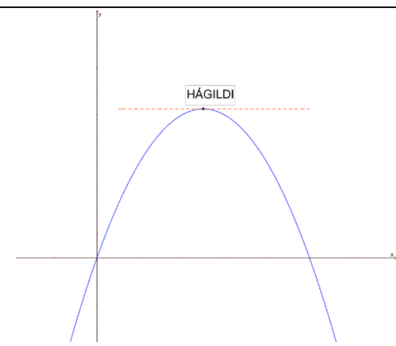
f´(x): Afleiðan = hið lækkaða form jöfnunnar, finnur hallatölur f´´(x): Önnur afleiða = hið tvílækkaða form jöfnunnar, finnur stefnu fallsina

Gildistafla: Reiknar úr punkta (x,y) ferilsins

x	f(x) = Jafnan.	y	(x,y)
1			
2			

Hallatöluformúlan: $$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hágildi: Hæsti punktur á bognum ferli þar er f´(x) = 0 þar er annaðhvort hágildi eða lággildi. Sjá mynd:

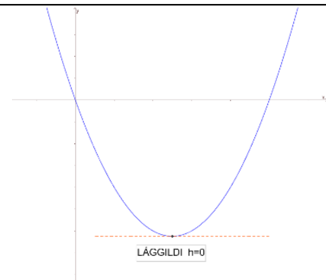


Heildun – heildi: táknað með merkinu: $\int$ Heildun er hið hækkaða form jöfnunnar = F(x) þegar veldið í jöfnunni er hækkað upp um einn samkvæmt reglunni:

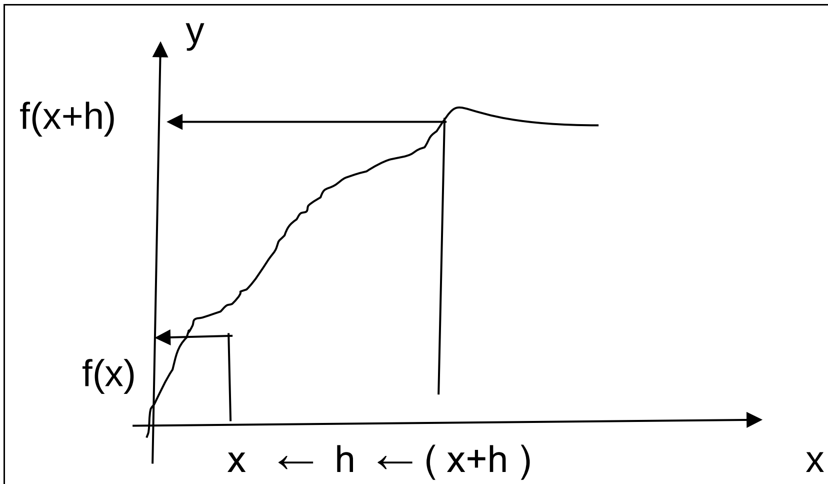
f(x) = x^n → F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Þá er hægt að reikna flatarmál með jöfnunni

Lággildi: Lægsti punkturinn á bognum ferli þar sem $f'(x) = 0$.Þar er annaðhvort hágildi eða lággildi



Lim $h \to 0$: lim þýðir limex = námundun = námundunargildi og þar sem $h \to 0$ er hallatalan



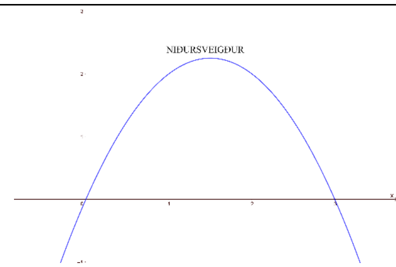
Því nær sem h kemst því að vera =0 því nákvæmari verður hallatalan í punktinum

(x,f(x))

Lækkaða formið: Afleiðan $f'(x)$ þar sem veldið er lækkað um 1 samkvæmt reglunni:

$f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$

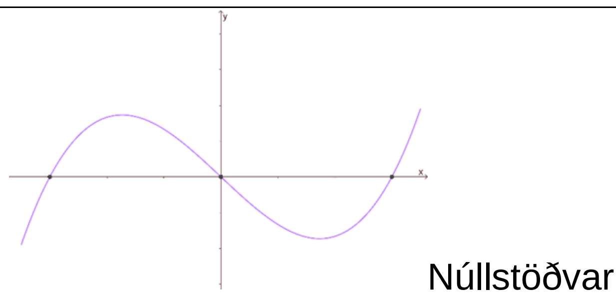
Niðursveigður: ferillinn er niðursveigður: Þar er $f''(x) = (-)$



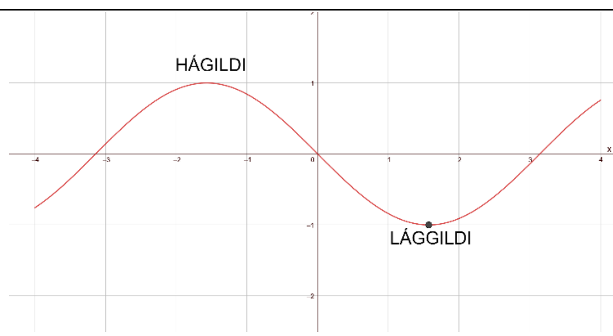
Núll sinnum taflan: $a \cdot 0 = 0$ það reynir á hana þegar fundin er afleiðan af x^0

$\mathbf{f(x) = x^0 \rightarrow f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0x^{-1} = \underline{0}}$

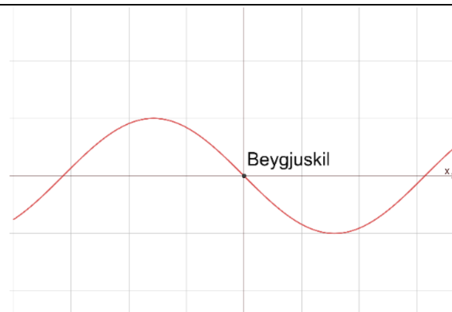
Núllstöðvar: Þar sem jafnan $f(x) = 0$ þá segja núllstöðvar okkur hvar ferillinn sker x–ásinn



Ef jafnan er $f'(x) =$ segir jafnan okkur til um hágildi og lággildi



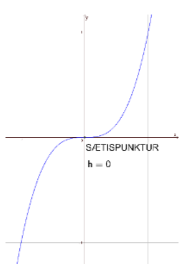
Þar sem f´´(x) = 0 þar eru beygjuskil. →

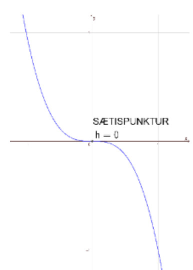


Stofnfall: $\int$ = hið hækkaða form jöfnunnar = F(x) finnst með reglunni:

f(x) = x^n → F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Sætispunktur: Tilbrigði við hágildi og lággildi þar sem f´(x) = 0. Hallatalan í sætispunktinum er = 0 einnig nefnd stallur





Tvílækkaða formið: f´´(x) þegar jafnan er sett tvisvar í gegnum jöfnuna:

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Einnig nefnt önnur afleiða.

Dæmi: **$f(x) = x^4$**

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

Uppsveigður: Ferill sem er á leiðinni upp

Veldareglur:

Umrita brot sem veldi:

$$\frac{1}{x^n} = \frac{x^{-n}}{1} \quad \text{Dæmi:} \quad \frac{1}{x^4} = \frac{x^4}{1}$$

Umrita rót sem veldi:

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}} \quad \text{Dæmi:} \quad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

a í núllta veldi er alltaf = 1

$a^0 = 1$

Önnur afleiðan: $f''(x)$ = önnur afleiða = hið tvílækkaða form jöfnunnar. Jafnan er sett tvisvar sinnum í gegnum jöfnuna:

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Þá gefur jafnan upplýsingar um stefnu.

Dæmi: $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^{2s}$