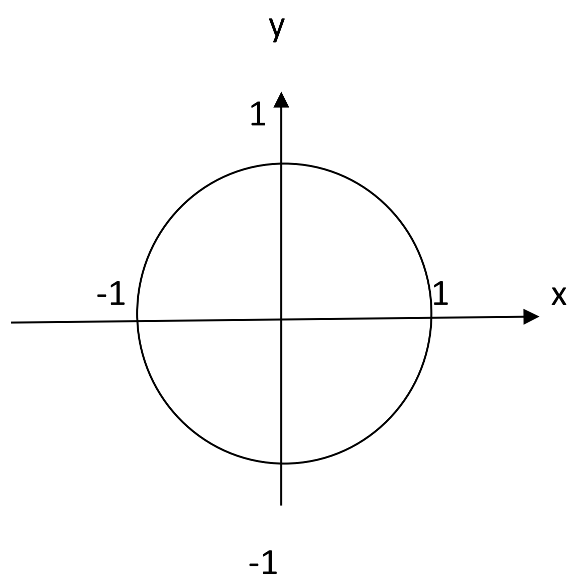
6.kafli Að lesa jöfnur í hnitakerfinu II - Einingahringur

6.1 Hornareglur í einingahring (cos, sin, tan)

Þú þarft að hugsa eins og einingahringur, hann er hringur með radíus 1,0 og miðpunktur hans er í upphafspunkti hnitakerfisins (0,0). Í hnitakerfinu mundi hann líta út svona:

Mynd:



Í hnitakerfinu eru óendanlega margir punktar (x,y). Á einingahringnum eru einnig óendanlega margir punktar (x,y).

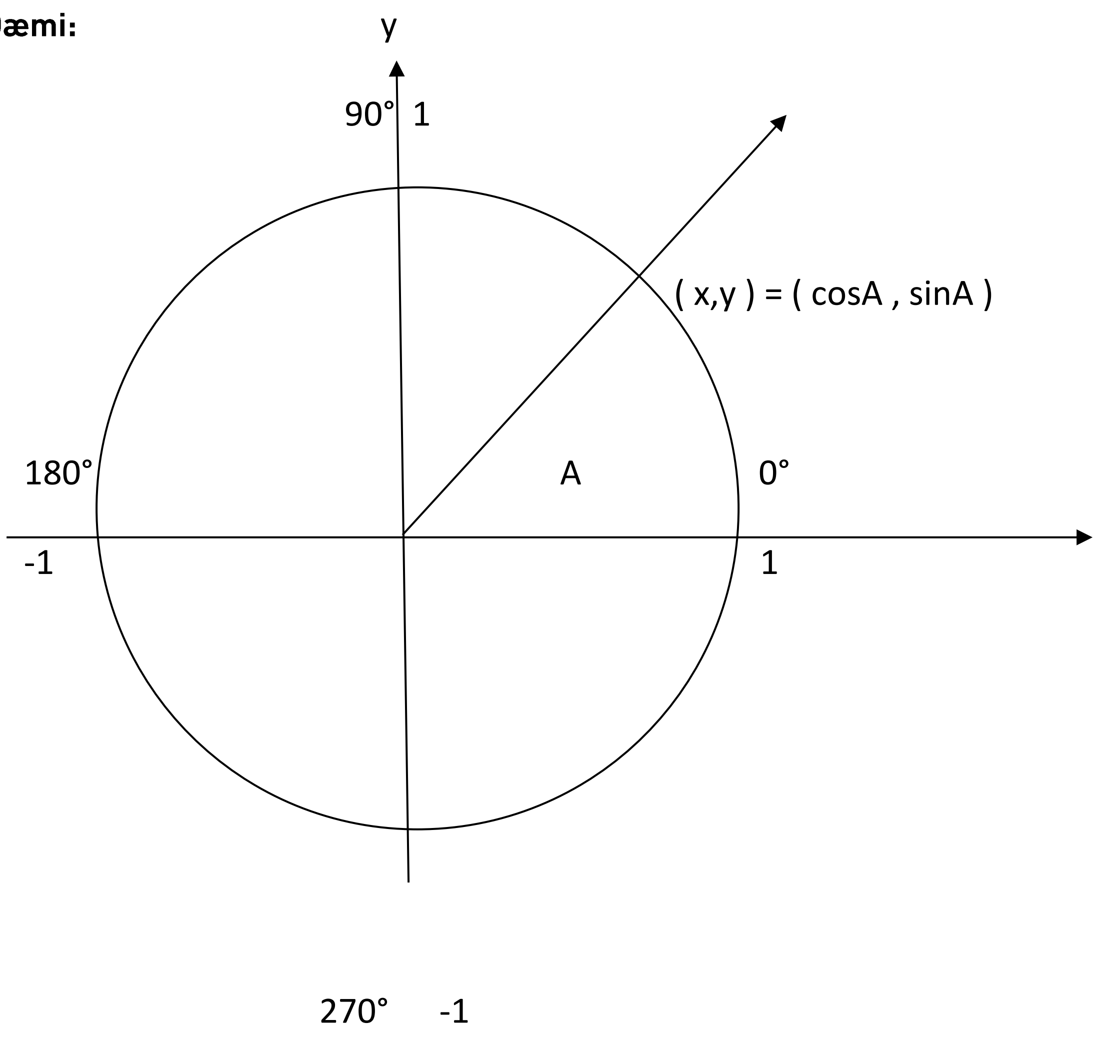
6.1.1 Cosinus og sinus föllin = cos, sin

Þeir punktar sem eru á einingahringnum eru sérstakir og því skilgreindir sérstaklega.

Þar sem x - hnit punkts á einingahring = cosA+ (n · 360°) og y - hnit punkts á einingahring = sinA + (n · 360°)

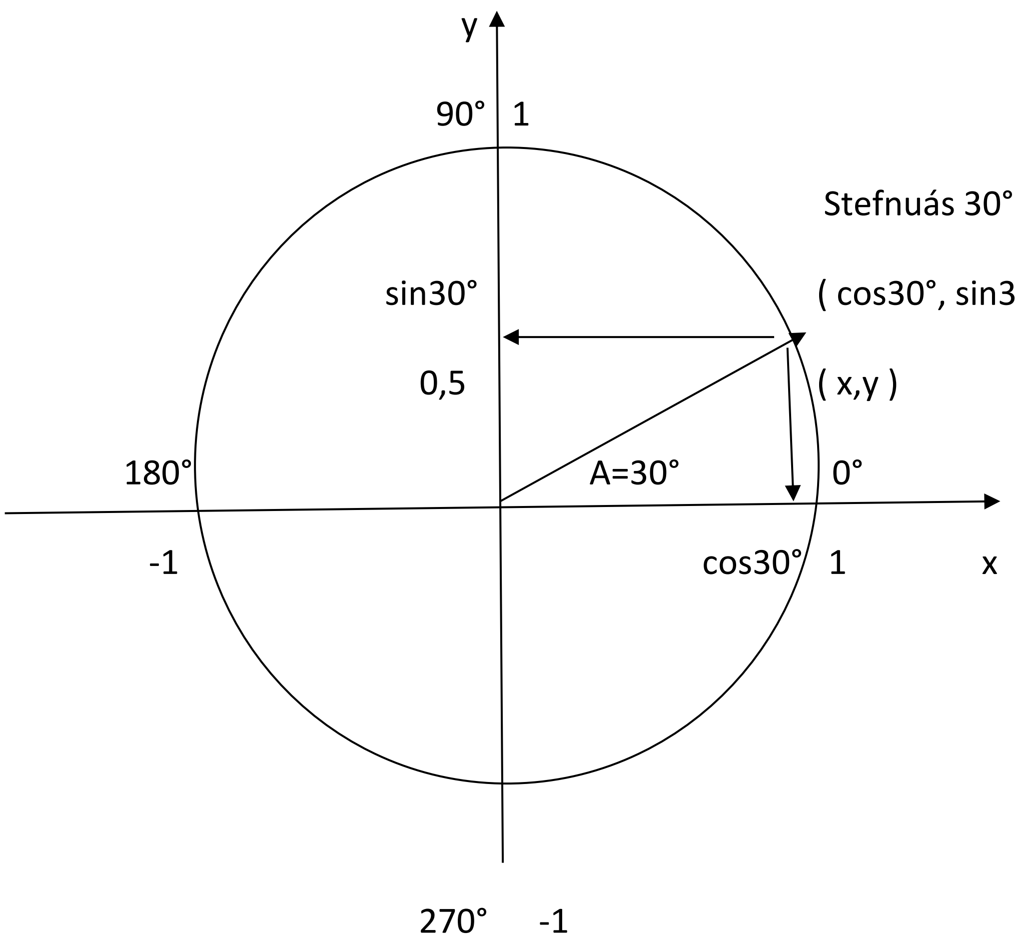
(x,y) = (cosA , sinA). A er hornið á milli x - ássins og stefnuáss hornsins A.

Dæmi:



Þetta allt saman tengist síðan öllum hornum í einingahringnum. Nú er hægt að fara allan einingahringinn og finna hvaða hnit punkts sem er á honum út frá stefnuhorni hans.

Dæmi:



Nú spyr ég reiknivélina mína: Hvert er hnitið (x,y) fyrir 30°?

Stefnupunkturinn er þá = cos30° = 0,8660 og sin 30°= 0,5

Hnit skurðpunkts einingahringsins og hornsins A = 30 ° er þá (x,y) = (cos30°, sin30°) = (0,8660 , 0,5)

Þannig get ég kortlagt alla punktana á einingahringnum ef ég veit stefnuhorn hans. SHIFT-takkinn á reiknivélinni efst til vinstri á takkaborðinu getur gefið þér hornastærðina ef þú veist annaðhvort cosA eða sinA.

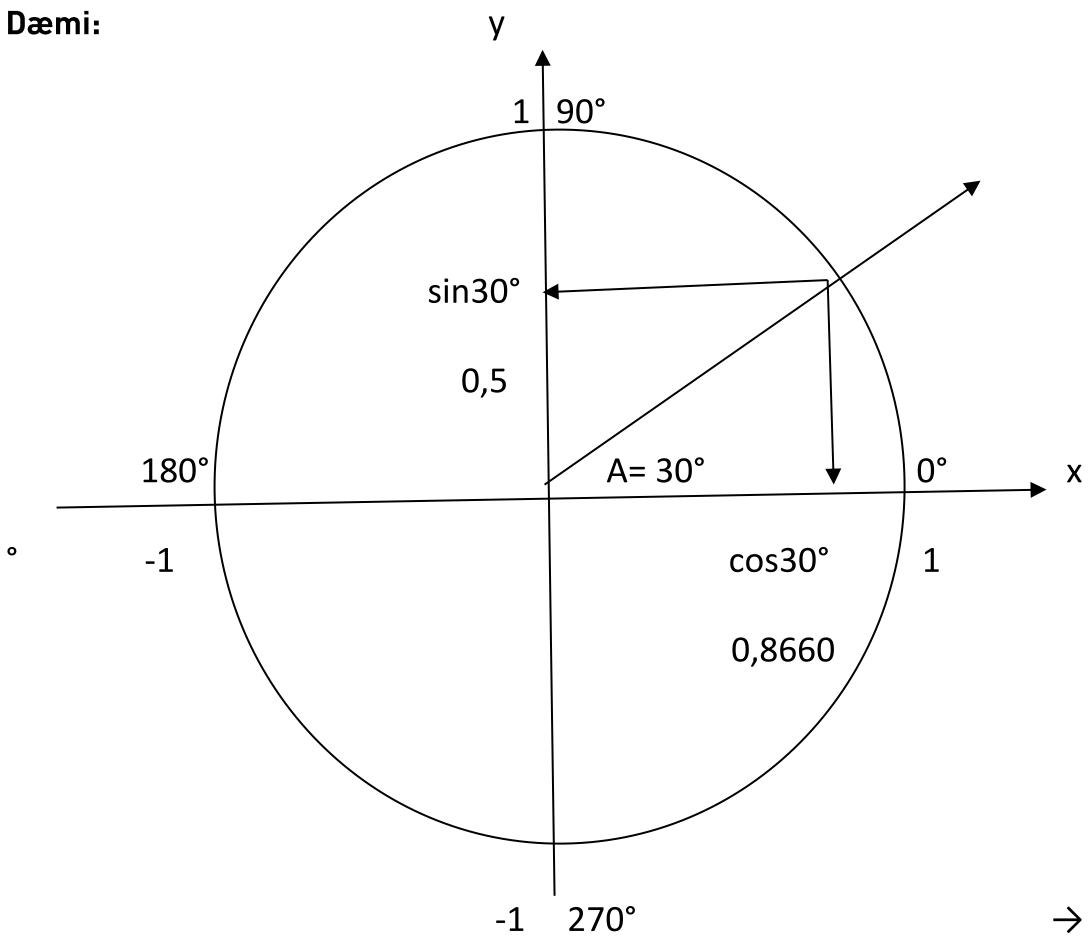
SHIFT cos 0,8660 = 30° og SHIFT sin 0,5 = 30°

6.1.2 Tangens - fallið = tan

Hversvegna fara stærðfræðikennaar aldrei í sólbað? Þeir þurfa þess ekki. Þeir deila bara cos í sin og fá út tan. Í þessari sögu kemur fyrir skilgreiningin á tan = tangens.

tanA = $\frac{sinA}{cosA}$ **eða** $\frac{y-hnit}{x-hnit}$ **tanA + (n · 180°)**

Dæmi:



Framhald:

tan30° = $\frac{sin30°}{cos30°}$ = $\frac{0,5}{0,8660}$ = 0,5773. Mun auðveldara er samt að gera beint á reiknivélina tan 30° = 0,5773. Reiknivélin finnur þá cos30°, deilir því í sin 30° og er fljót að því

Einnig má nota SHIFT-takkann á reiknivélinni og spyrja reiknivélina: Hvaða horn hefur tangensinn 0,5773?

SHIFT tan 0,5773 = 30°

Tan er ekki hnit, heldur deiling hnita: tanA = $\frac{sinA}{cosA}$ = $\frac{y-hnit}{x-hnit}$

6.1.3 Cotangens - fallið = cot

Cotangens = cot er öfug deiling miðað við tan og er skilgreint:

cotA = $\frac{cosA}{sinA}$ = $\frac{x-hnit}{y-hnit}$

Cotangens fallið er minnst notað af þeim félögum cos, sin, tan og cot. Cotangens hefur ekki sérstakan takka á reiknivélinni, heldur þarf að nota x^{-1} - takkann á reiknivélinni sem snýr við deilingunni.

Dæmi:

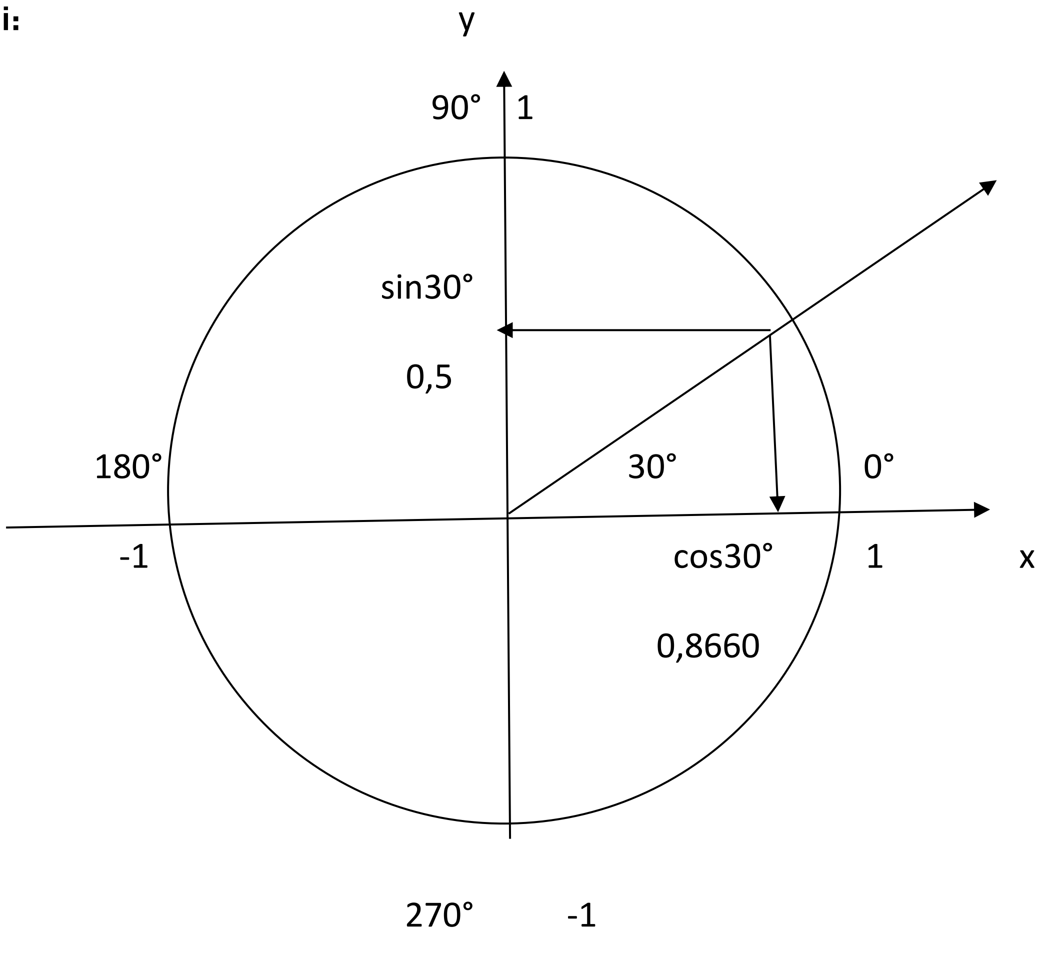
Finndu cot 30°, þá þarf að deila $\frac{cos30°}{sin30°} = \frac{0,8660}{0,5} = 1,7320$

eða tan 30° = 0,5773 og svo x^{-1} = 1,7320

6.1.4 Lotan fyrir cos og sin

Lota er endurtekning á einingahringnum ef þú ferð meira en einn hring.

Dæmi:



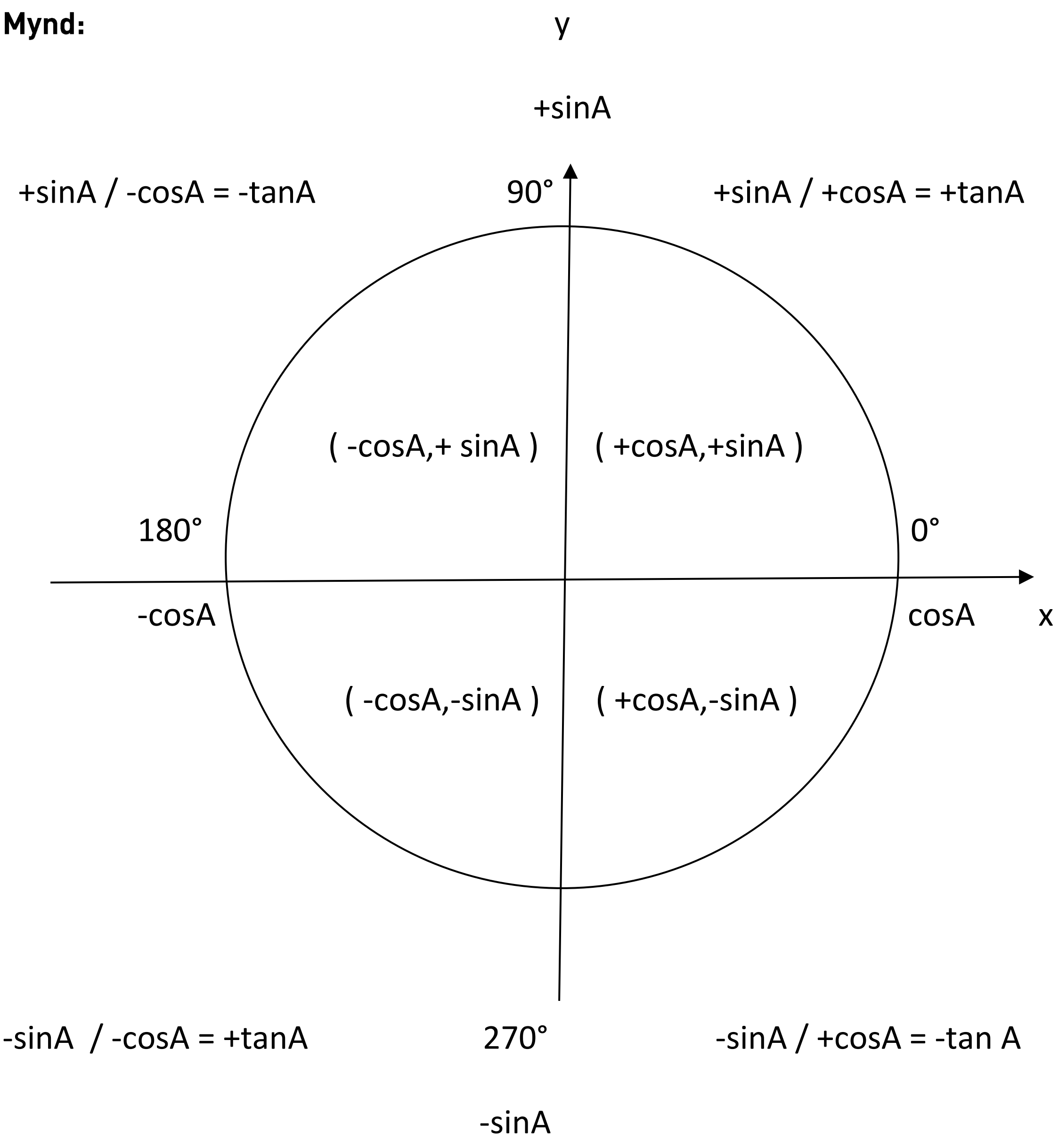
$cos30° + (n \cdot 360°)$ n = fjöldi 360° snúninga = einn

$sin30° + (n \cdot 360°)$ hringur í einingahringnum = 360°

Lotan fyrir cos og sin er 360° sem er einn einingahringur en lotan endurtekningin fyrir tan er 180°.

tanA + (n · 180°)

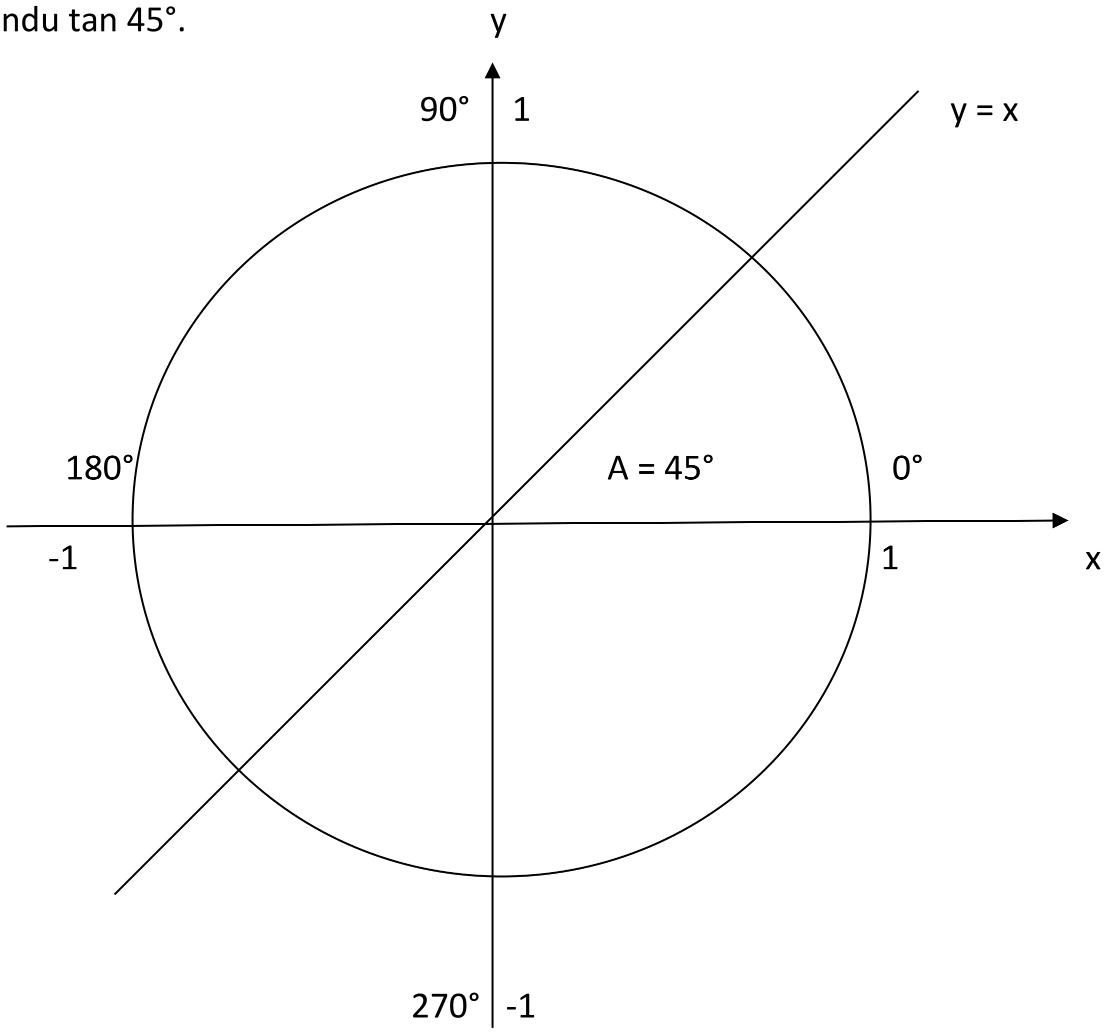
Mynd:



+ tan í I og III fjórðungi og -tan í II og IV fjórðungi.

Dæmi:

Finndu tan 45°.



tan 45° = 1

tan (180° + 45°) = tan 225° = 1

tan A = tan A + (n · 180°)

Nú getur þú reiknað út hvaða hornastærð sem er inni í einingahringnum ef þú veist cos, sin, tan eða cot, þú spyrð bara reiknivélina þína.

Dæmi:

Finndu á reiknivélinni þinni:

cos 30° = 0,8660

sin 30° = 0,5

tan30° = 0,5773

cot 30° = tan 30° x^{-1} = 1,7320

Finndu stærð hornsins A á reiknivélinni þinni ef:

cosA = 0,5   þá er   shift cos 0,5 = 60°

sinA = 0,8660 þá er   shift sin 0,8660 = 60°

cot A = 2.0 þá er tanA = $\frac{1}{2}$ og shift tan $\frac{1}{2}$ = 26,56°

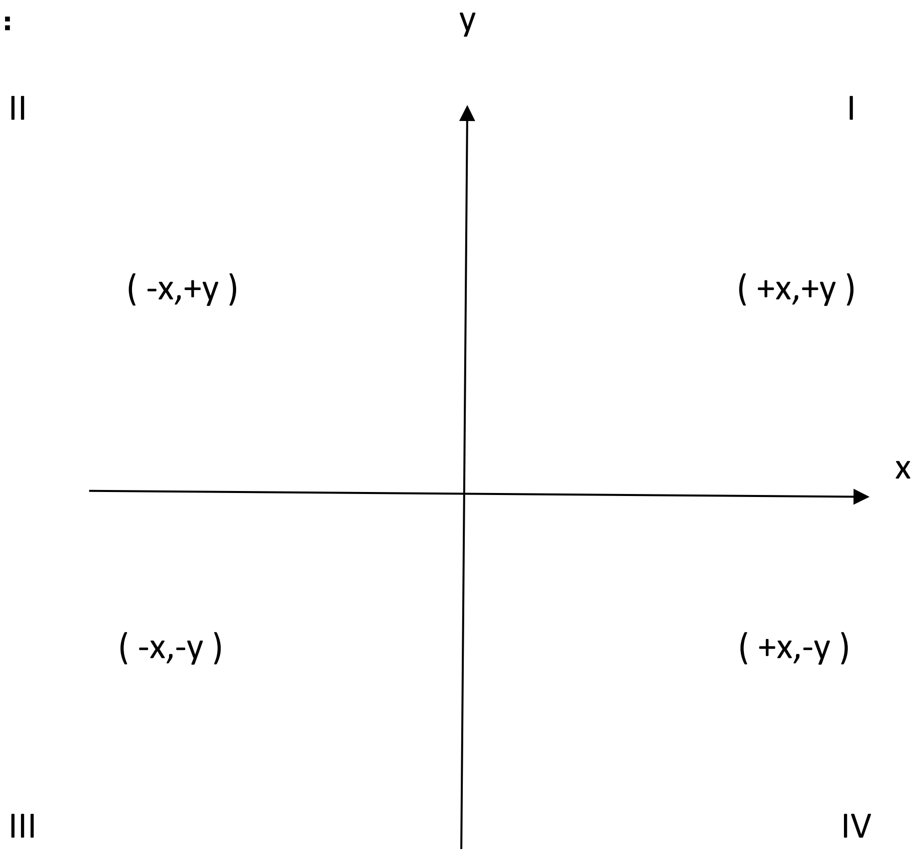
6.1.5 Reiknivélar: (cos, sin, tan og cot)

Á reiknivélinni þinni eru þrír takkar: cos, sin og tan og með þeim getur þú fundið hvaða x-hnit og y-hnit á einingahringnum og einnig allar deiliningar $\frac{y-hnit}{x-hnit}$ = tan. Hinsvegar er ekki cot - takki á reiknivélinni þinni, hann snýr við deilingunni og $\frac{y-hnit}{x-hnit}$ verður $\frac{x-hnit}{y-hnit}$. SHIFT takkinn setur þig í tengsl við neðra borð reiknivélarinnar þinnar þannig að segja má að (tanA $)^{-1}$ = cotA.

6.2 Speglunarreglur

Rifjum aðeins upp fjórðunga hnitakerfisins og tengjum það við einingahringinn.

Mynd:



Hnitakerfið skiptist í fjóra fjórðunga. Formerkin á x og y - ás eru mismunandi, eftir því í hvaða fjórðungi þau eru í:

I. Fjórðungur = (+x,+y)

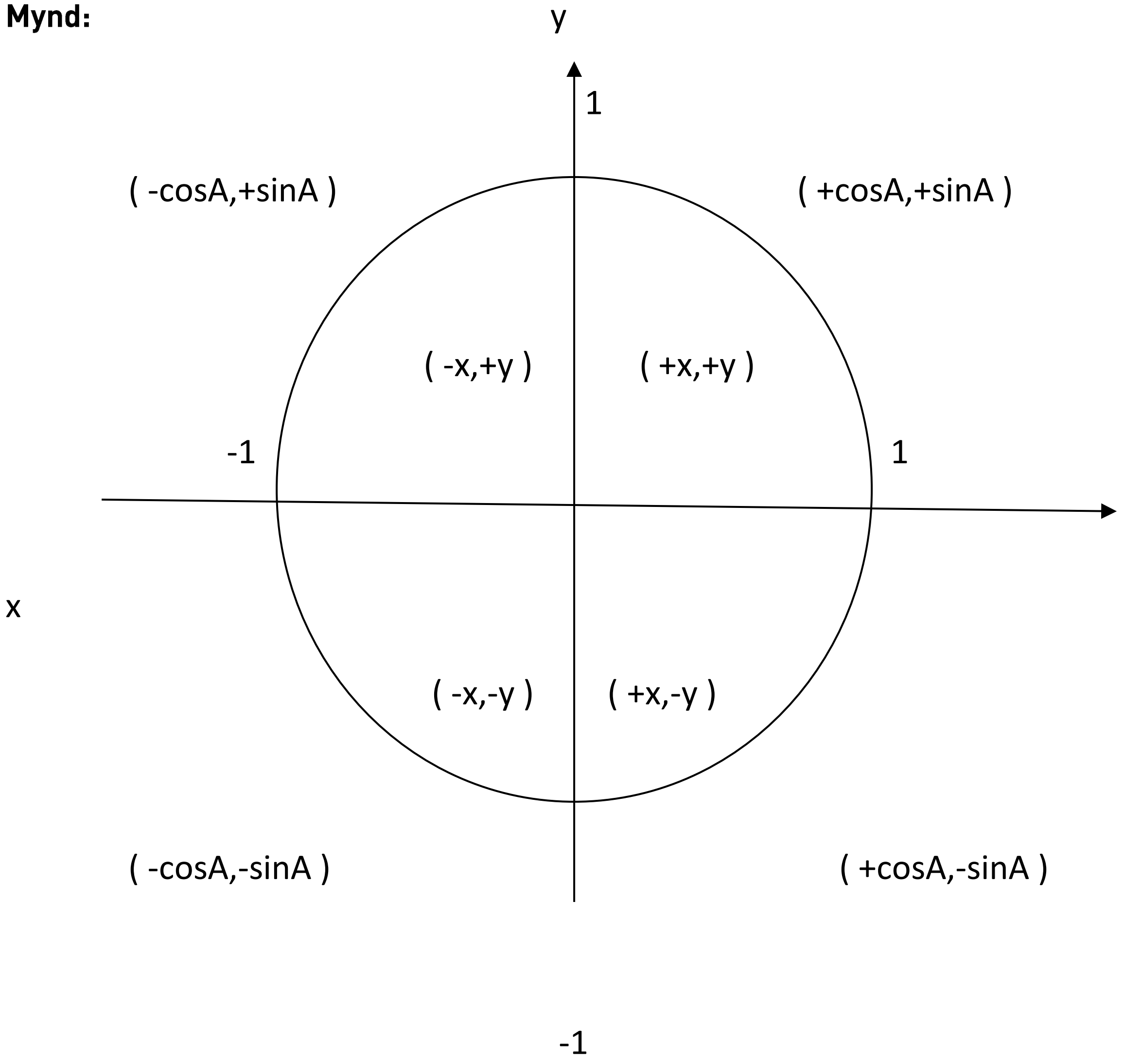
II. Fjórðungur = (-x,+y)

III. Fjórðungur = (-x,-y)

IV. Fjórðungur = (+x,-y)

Þar sem einingahringurinn er í öllum fjórum fjórungum hnitakerfisins verða formerkin á cos og sin alveg eins og á (x,y).

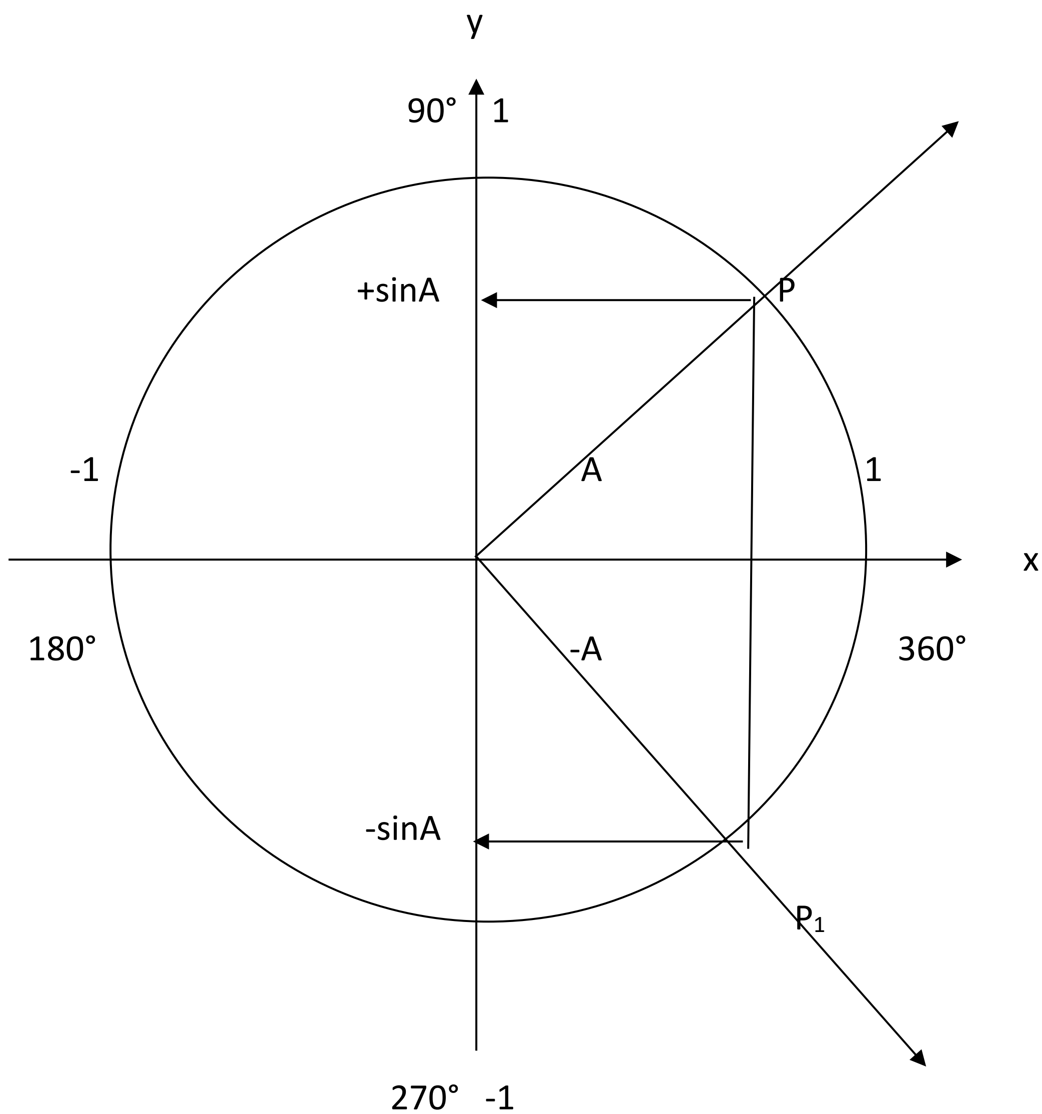
Mynd:



Þessi mynd er sérlega góð til þess að átta sig á öllum speglunum í einingahringnum bæði um x–ásinn = (cosA), og eins um y–ásinn = (sinA).

Skoðum nú regluna: sin(-A) = -sinA

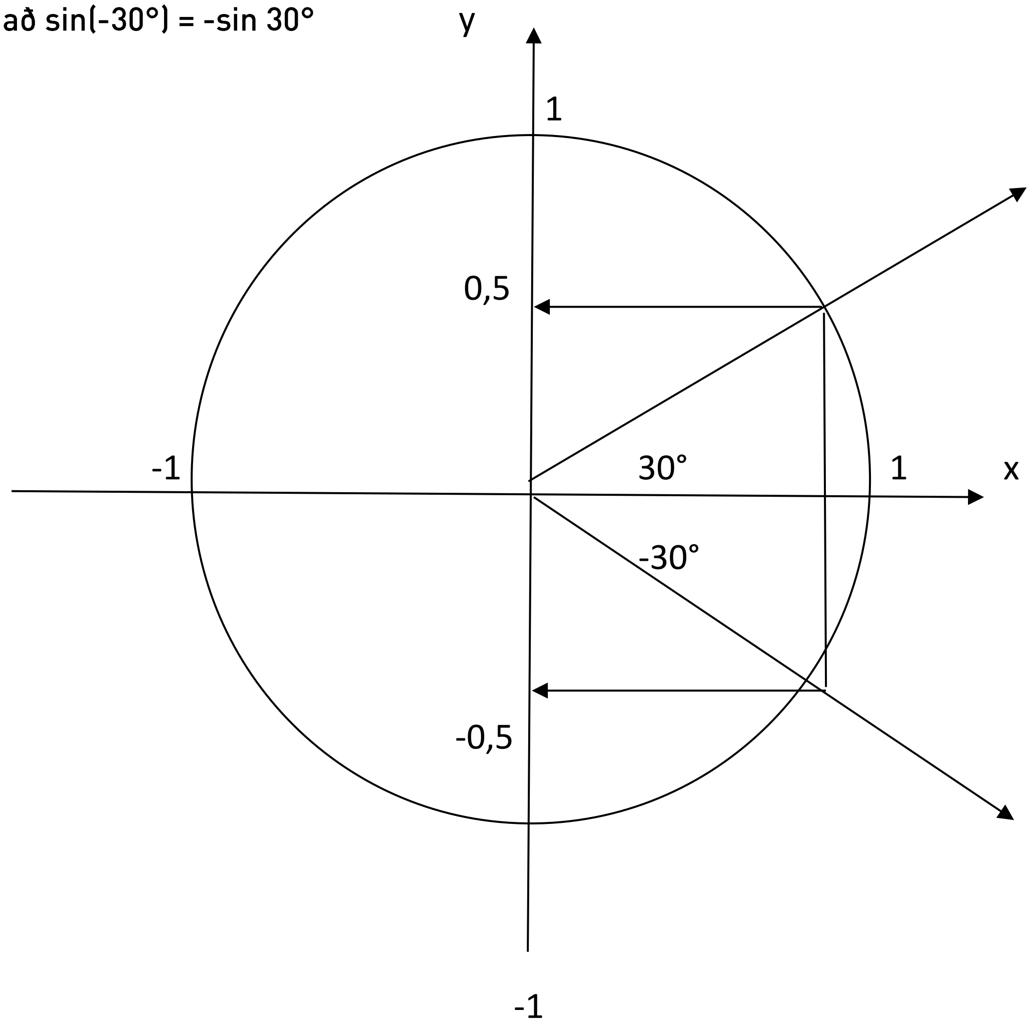
Mynd:



Þegar þú speglar y - hnit yfir y - ásinn breytast formerkin ekki en þegar þú speglar y - hnit yfir x - ásinn breytast formerkin.

Dæmi:

Sýndu að sin(-30°) = -sin 30°



sin 30° = 0,5

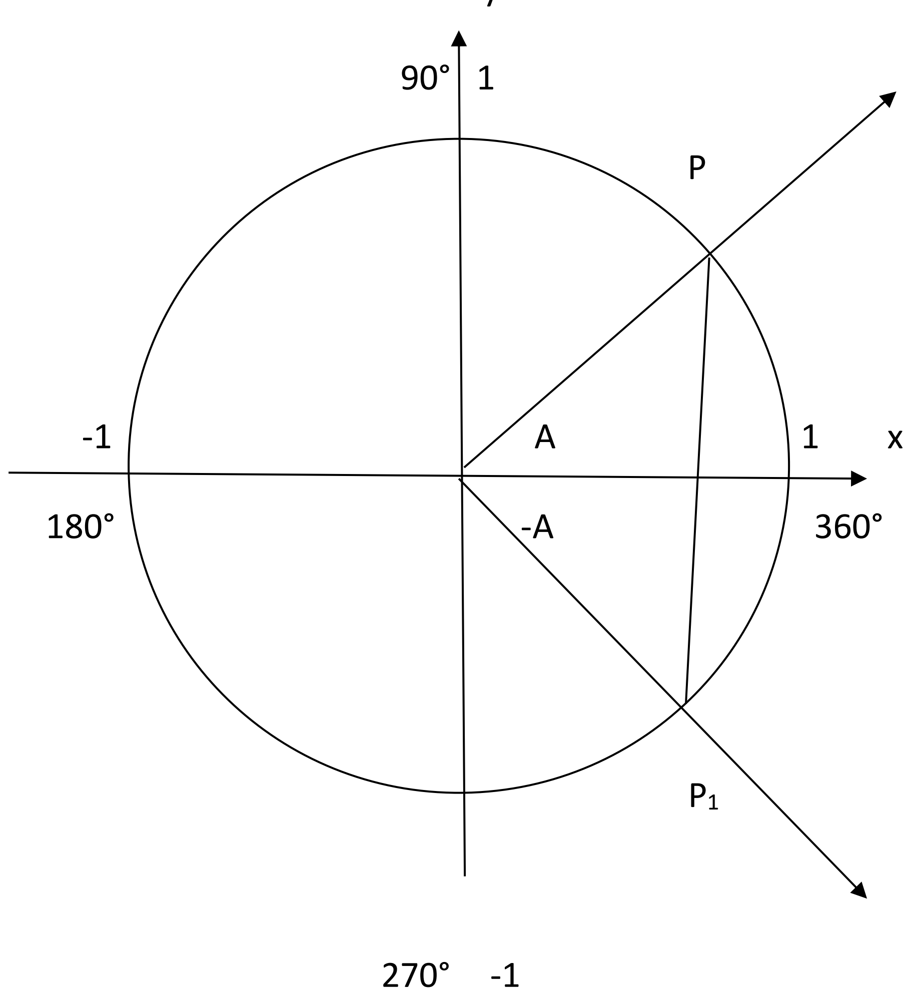
sin(-30°) = 0,5

Formerkin breytast + $\boxed{\leftrightarrow}$ -

Speglun: Cos (-A) = cos A

Þessi regla lýsir speglun x -hnits um x - ás. Því breytast formerkin ekki.

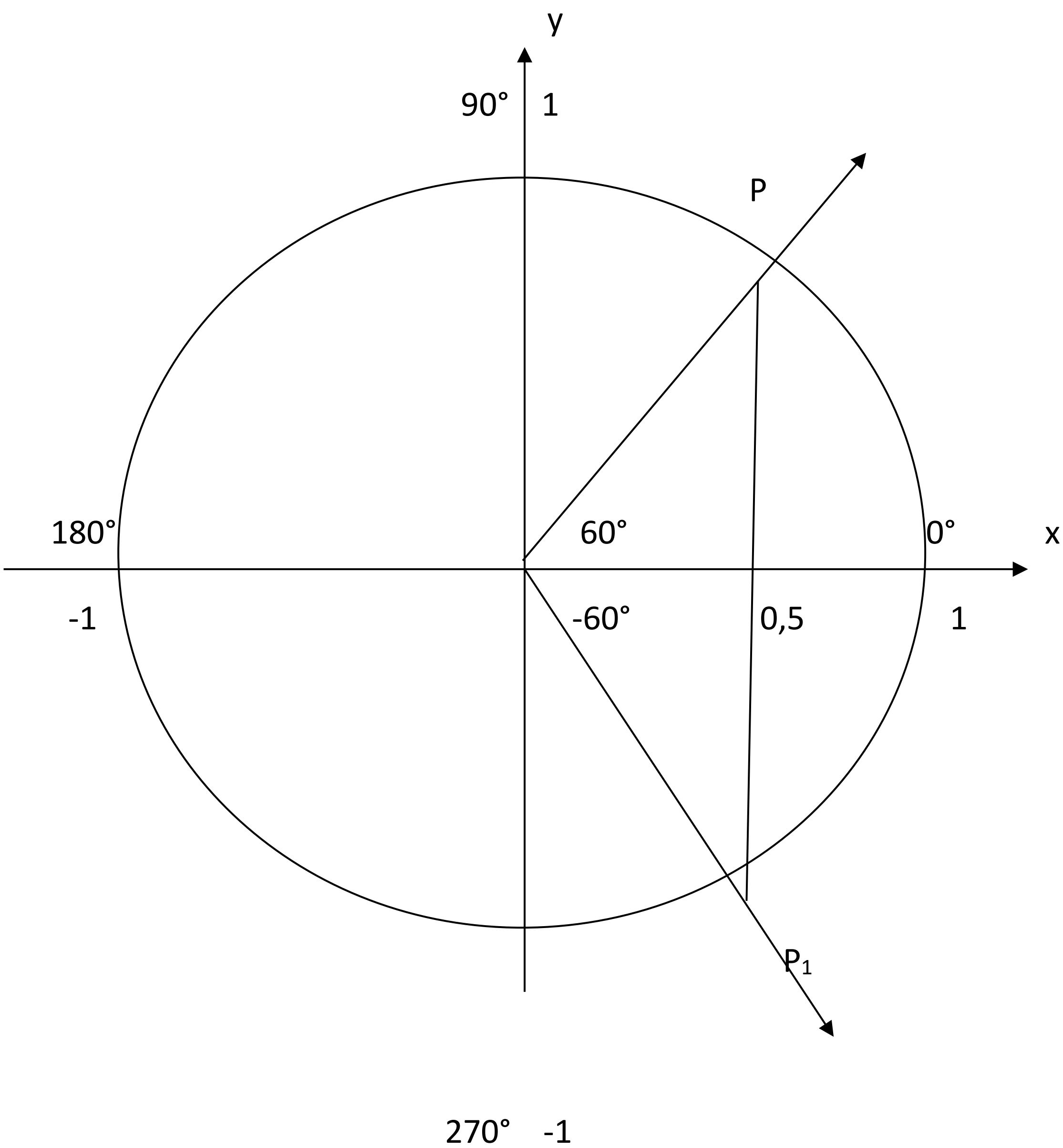
Mynd:



x- hnit = cosA er sá sami fyrir stefnupunktana P og P_1 bæði hornsins A og (-A).

Dæmi:

Sýndu að cos(-60°) = cos60°



x - hnit stefnupunktanna P og P_1 í 60° og -60° sé það sama. x - hnit = cosA

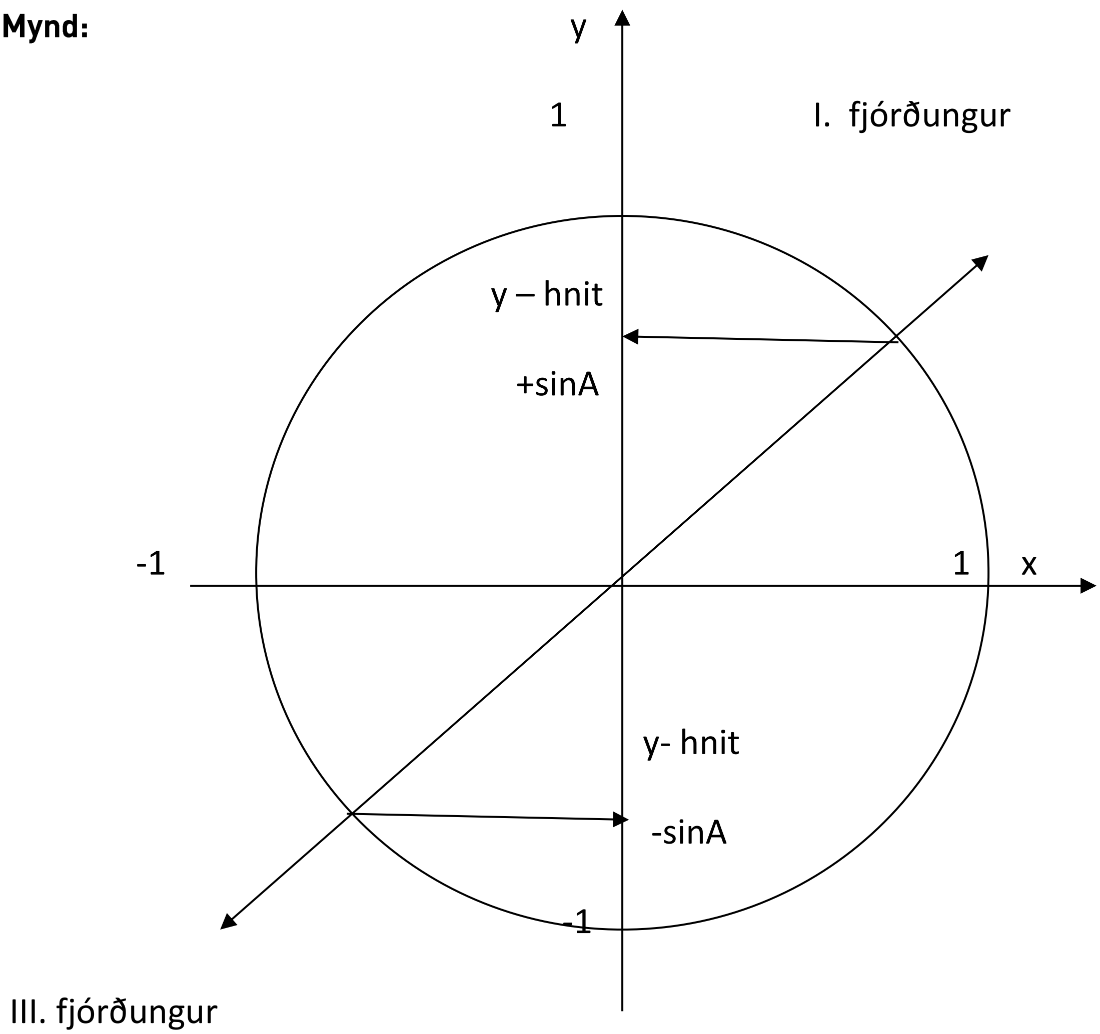
cos60° = 0,5 og cos(-60°) = 0,5. Formerkin breytast ekki.

6.3 Snúningsreglur cos og sin

sin(A + 180°) = - sinA

Þessi regla lýsir því hvað gerist í einingahringnum við 180° snúning = (hálfhrings snúning). Fyrir y - hnitið = sinA.

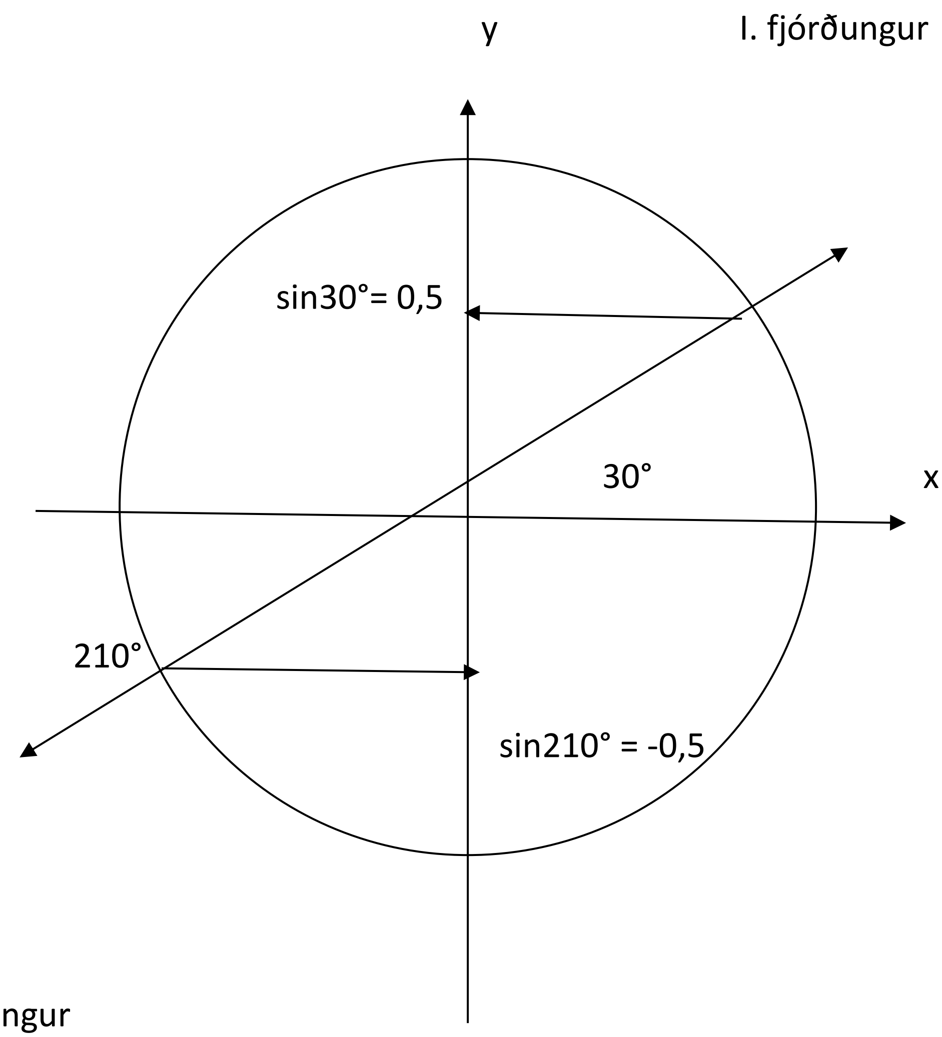
Mynd:



y - hnit = sinA hefur í I. fjórðungi + en - í III.fjórðungi

Dæmi:

Sýndu að sin30° = -sin (180° + 30°) = sin 210°

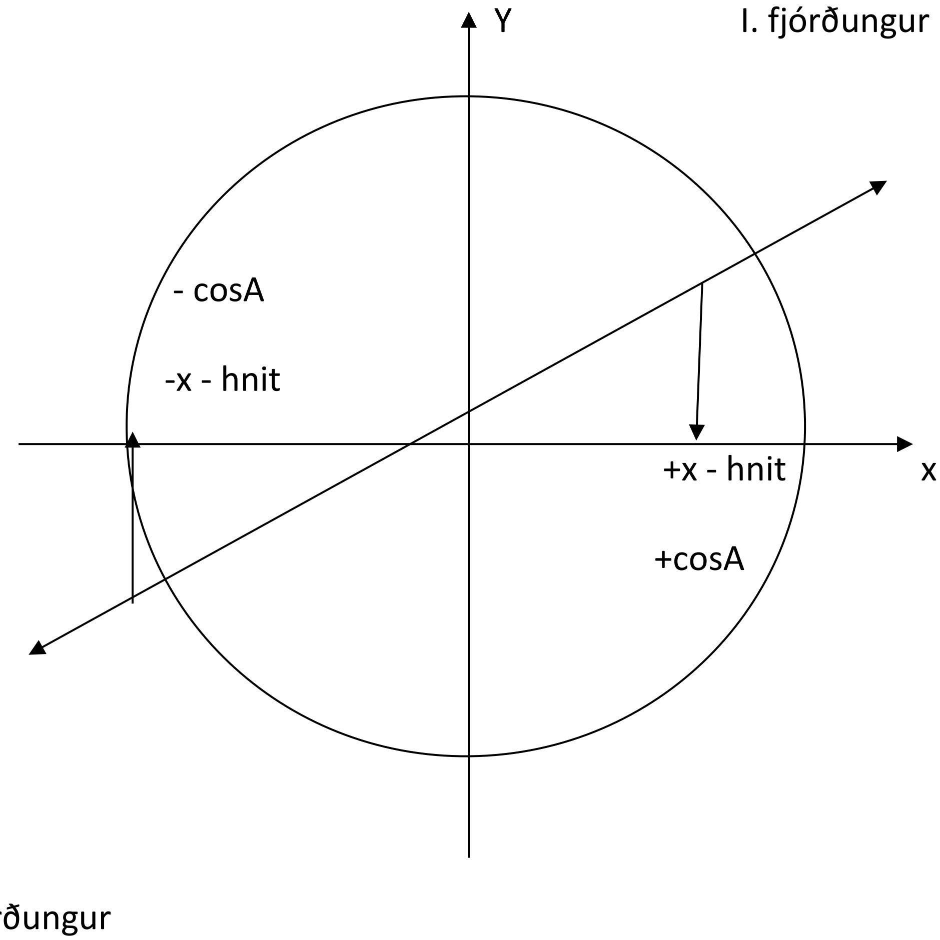


sin30° = 0,5 og sin(180°+ 30°) = sin 210° = -0,5

Snúningur um 180° = (hálfhringur) breytir +y í -y það er: +sin A í -sinA.

$\cos(A + 180°) = -\cos A$

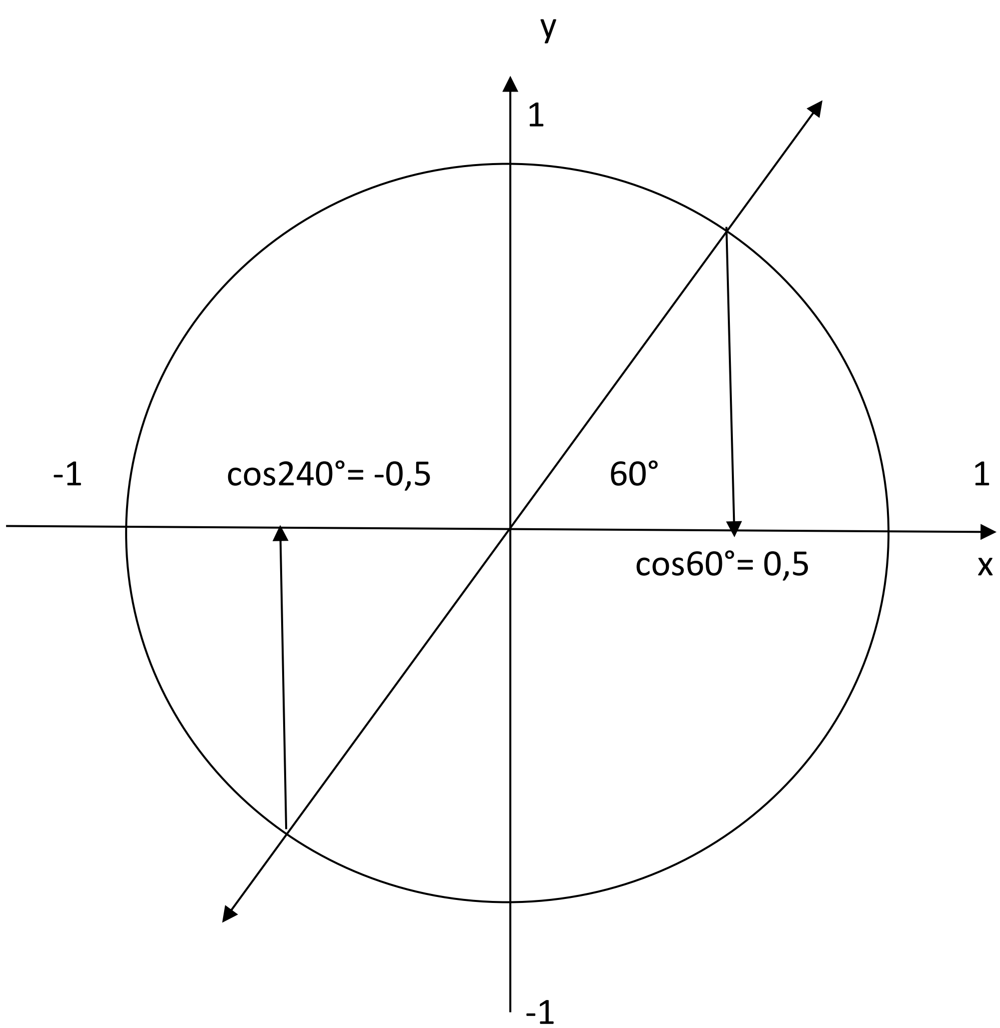
Mynd:



x - hnit = cos A hefur í I fjórðungi + en í III. fjórðungi -

Dæmi:

Sýndu að cos60° = cos (180° + 60°) = cos 240°



cos60° = 0,5

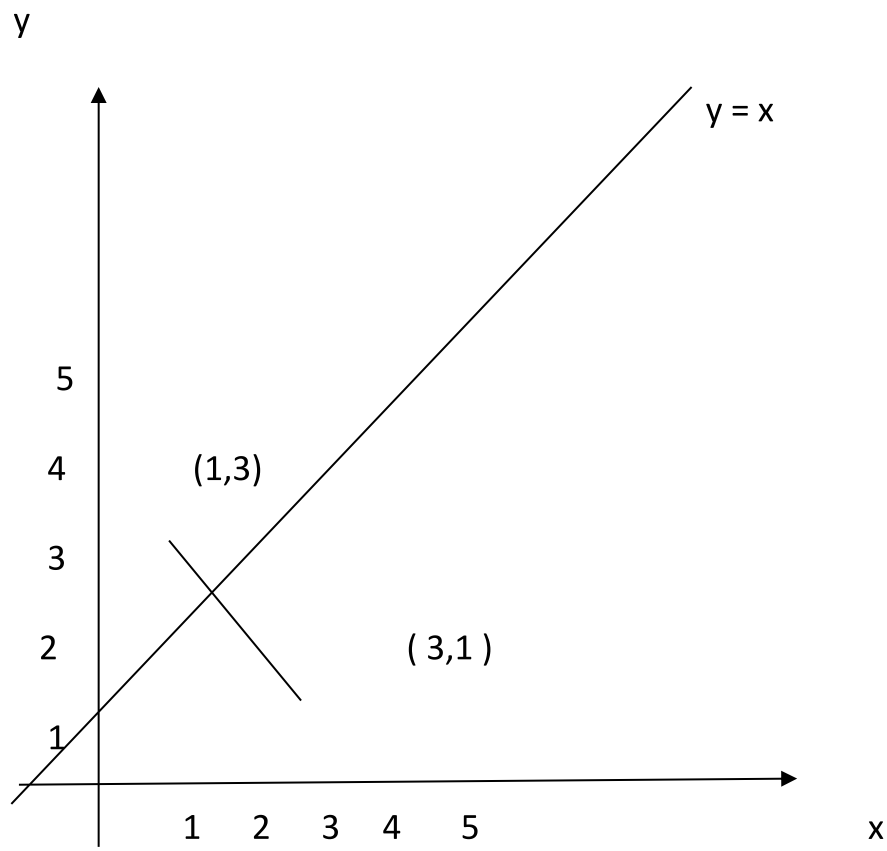
cos (180° + 60°) = cos 240° = <u>-0,5</u>

Snúningur um 180° (hálfhring) breytir +cos í -cos.

Dæmi um fleiri snúningsreglur:

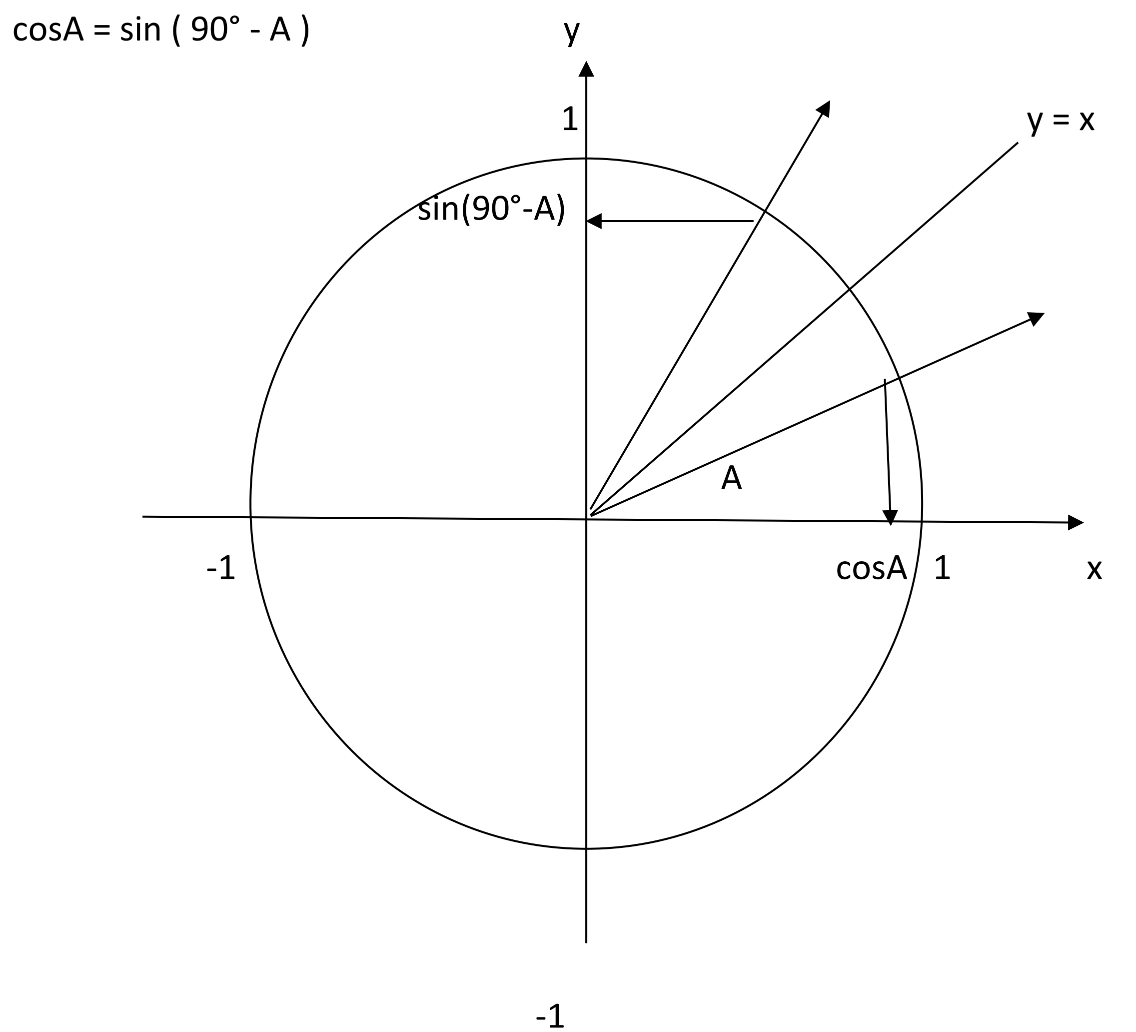
Dæmi:

Snúir þú við x og y – hnitunum, t.d $P = (1,3)$ verður $P_1 = (3,1)$. Þá er gaman að skoða hvernig þetta lítur út í hnitakerfinu. Þá speglast punktarnir um línuna y = x.



Þetta er í raun alveg eins inni í einingahringnum. Skoðum nú tvær reglur um það.

Mynd:



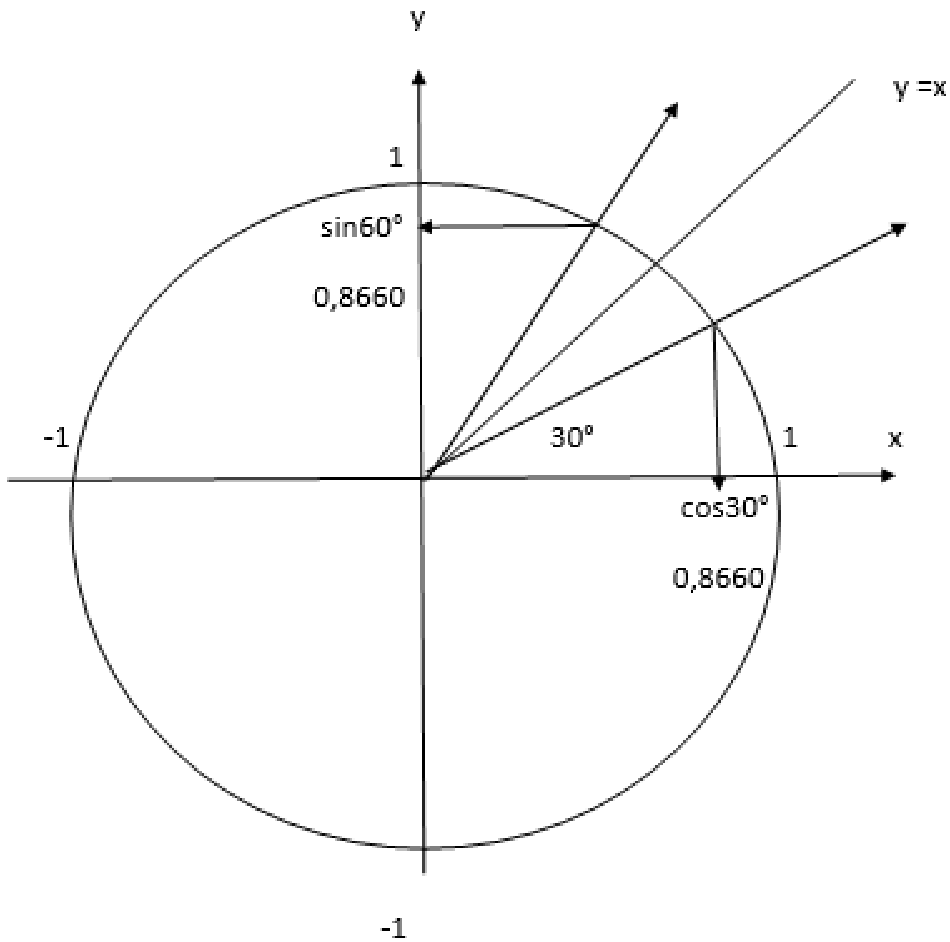
cos A = sin (90°- A)

Gott er að skoða dæmi um þessa speglun um línuna y = x í næsta sýnidæmi þar sem cosA = sin (90°- A).

Dæmi:

Hornið A = 30° Sýndu að cos 30° = sin (90° - A) = sin60°.

Skoðum mynd.

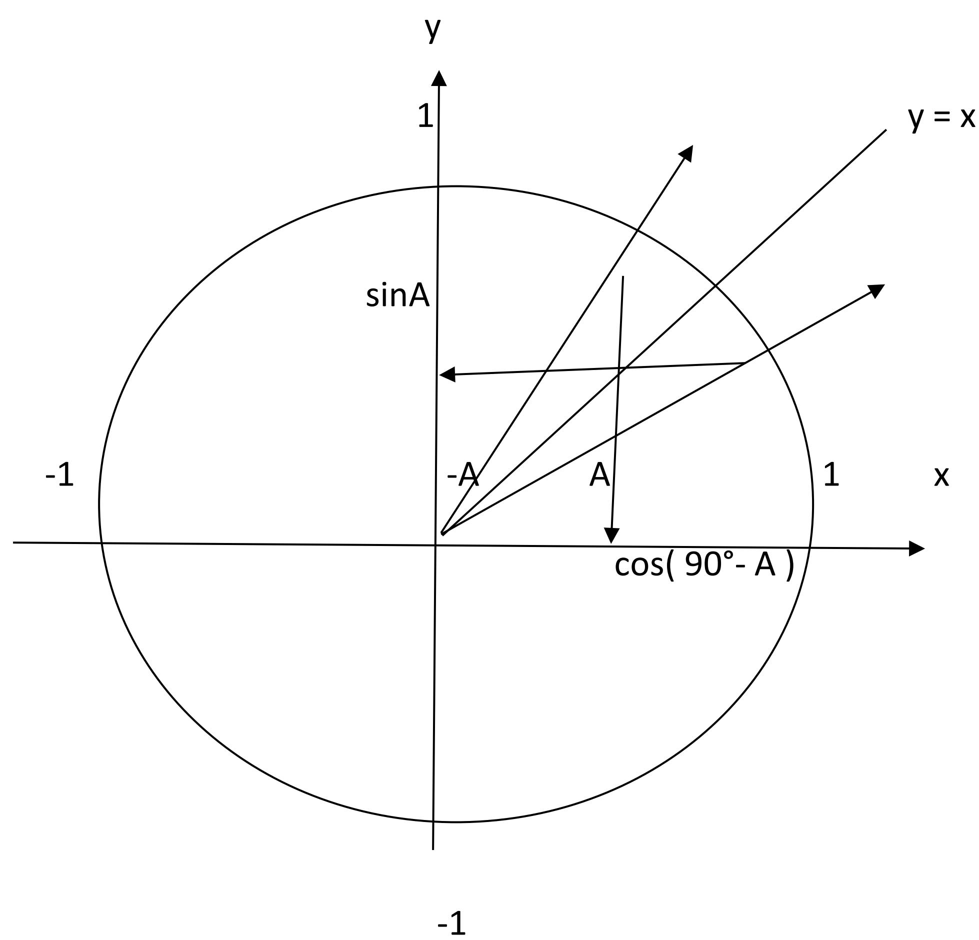


sin 60°= 0,8660 og cos30° = 0,8660.

Skoðum nú reglu um speglun sin og cos um línuna y = x.

sinA = cos (90° -A).

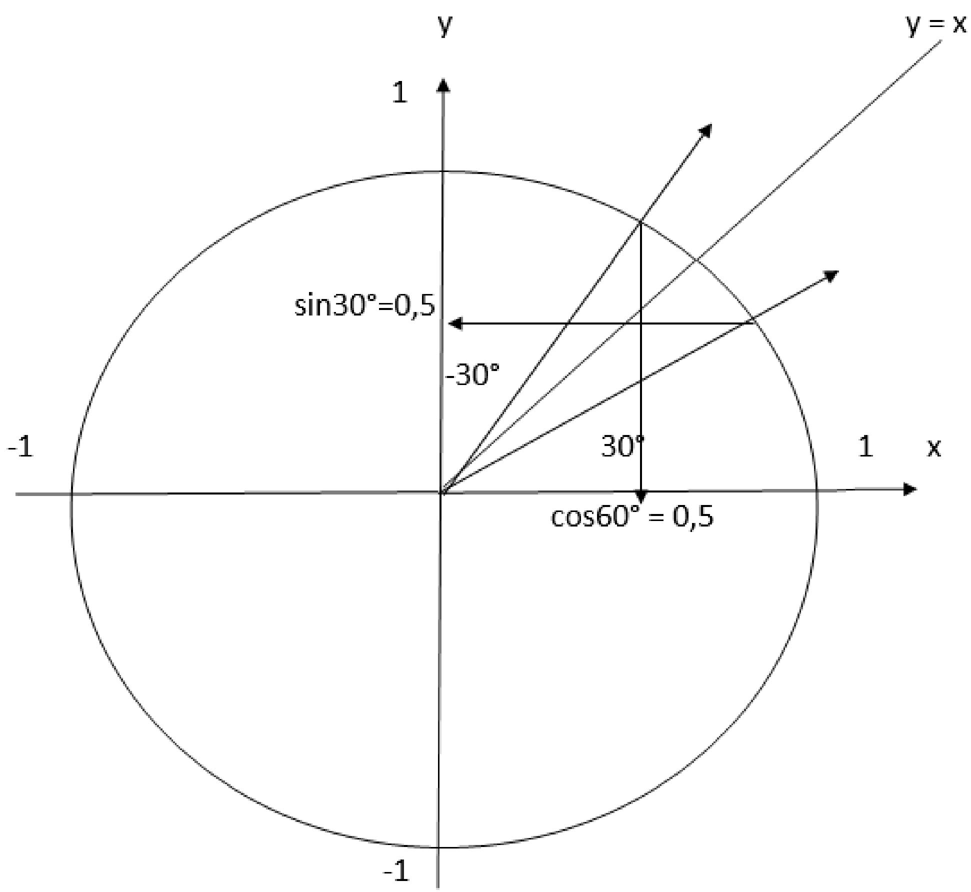
Mynd:



Þessi regla er nokkuð augljós ef þú ferð jafnlangt frá x -ás =hornið A = og frá y - ás = hornið -A. Þá verða x og y - hnitin þau sömu. Skoðum nú dæmi um þetta.

Dæmi:

Sýndu að reglan sinA = cos (90° - A) gildi þegar A = 30°



sin30° = 0,5 og cos (90° - 30°) = 0,5.

6.4 Hornafallaeiningin

Reglan hér að neðan er kölluð hornafallaeiningin.

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

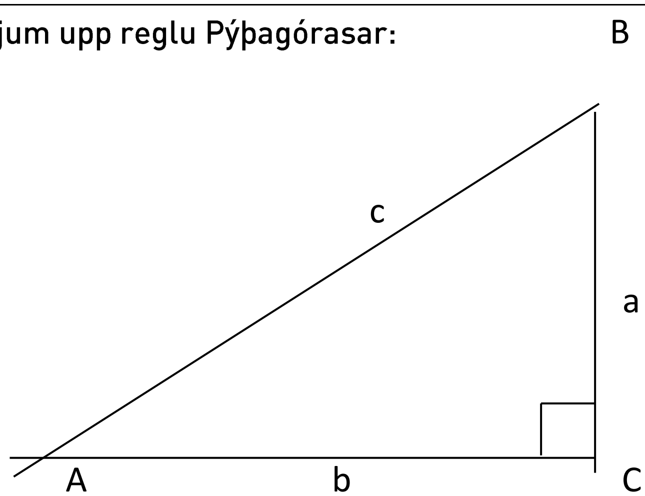
Hún heitir í höfuðið á einingahringnum því radíus einingahrings er auðvitað = 1. Um þessa reglu má annars segja að hún sé regla Pýþagórasar endurfædd inn í einingahringnum.

$a^2 + b^2 = c^2$

Hægt er að túlka öll horn inni í einingahringnum sem 90° þríhyrninga með langhliðina c = 1 og skammhliðarnar sem cosA og sinA.

$a^2 + b^2 = c^2$ er semsagt = og $\cos^2 A + \sin^2 = 1$

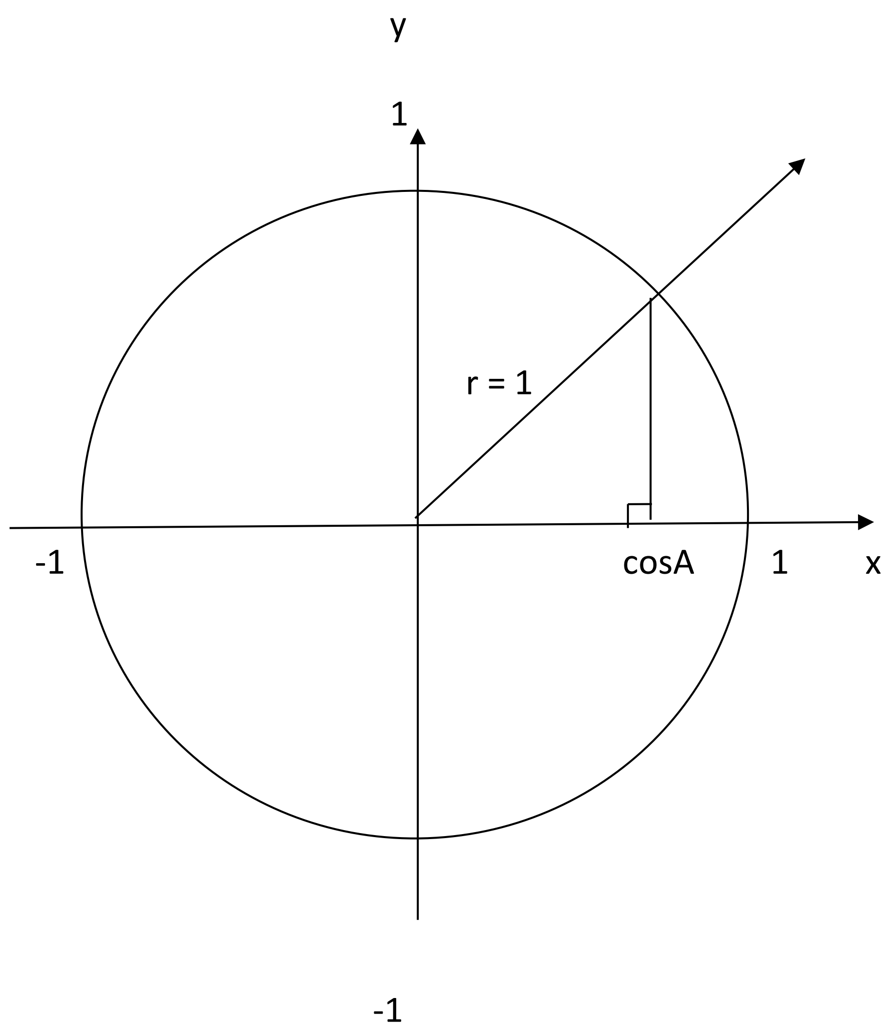
Rifjum upp reglu Pýþagórasar:



$a^2 + b^2 = c^2$

þar sem c er langhliðin á móti 90° horninu og hliðarnar a og b eru því skammhliðarnar. Setjum nú þríhyrninginn inn í einingahringinn þar sem langihliðin er = 1 og skammhliðarnar eru cosA og sinA.

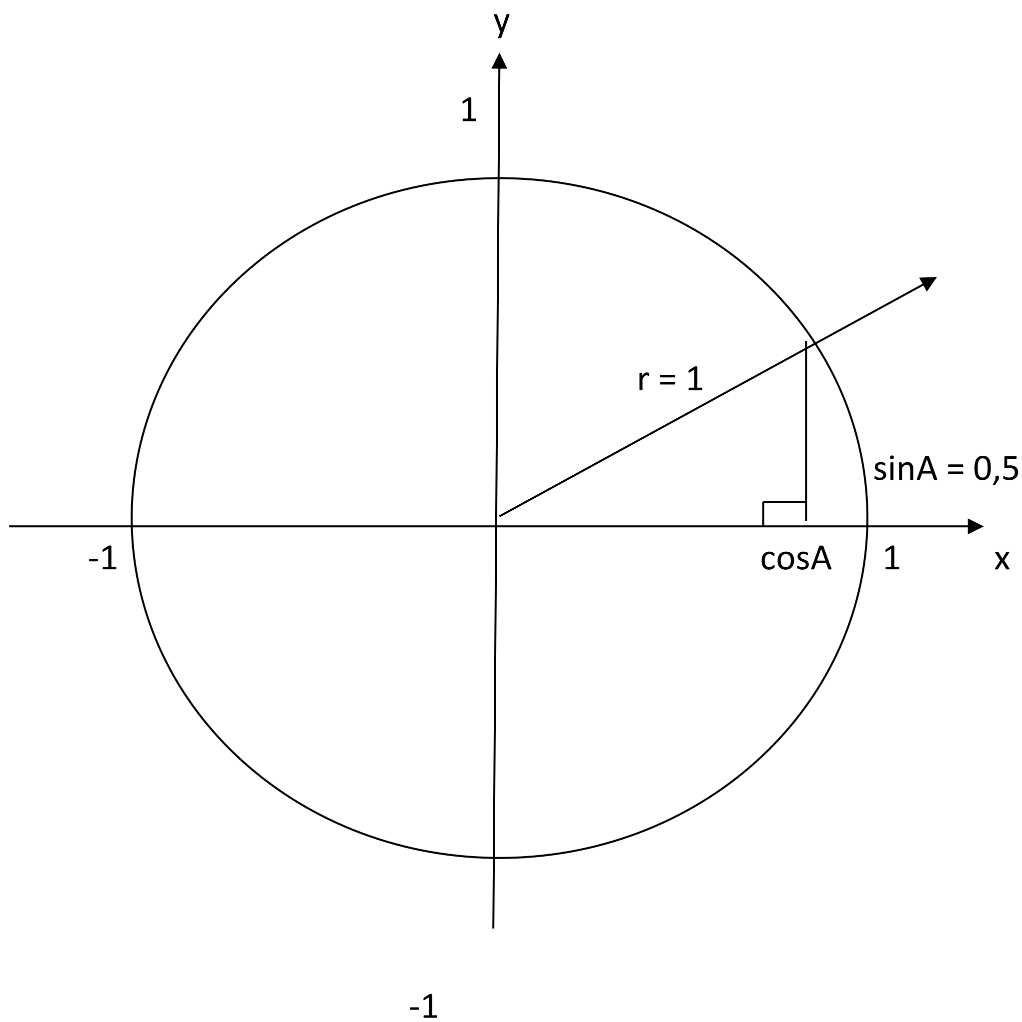
Mynd:



$\cos^2 + \sin^2 = 1$

Dæmi:

Finndu cosA ef sinA = 0,5 og hornið er í I. - fjórðungi. Finndu stærð hornsins A.



$\cos^2 A + 0,5^2 = 1^2$

$\cos^2 A + 0,25 = 1$

$\cos^2 A = 1 - 0,25$

$\cos^2 A = 0,75$

$\cos A = \sqrt{0,75} = 0,8660$

SHIFT sin 0,5 = 30°

Hornið A = 30°

Skoðum nú lítið dæmi þar sem hornafallaeiningin kemur við sögu. Þar þarf að sanna. Skoðum nú líkan fyrir sannanir.

A = B = C
þá er
A = B

Hér sést að B er sá sem tengir saman A og C.

Dæmi:

Sýndu fram á (sannaðu) að:

$$\text{sinA} + \frac{cos^2 A}{sinA} = \frac{1}{sinA}$$

A = C

Hér er vandinn að finna B tenginguna á milli A og C

Leggjum saman $\frac{sinA}{1} + \frac{cos^2 A}{sinA}$ **samnefnarinn = sinA**

Þá er: $\frac{sin^2 A + cos^2 A}{sinA}$ **og** $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Ef: $\text{sinA} + \frac{cos^2 A}{sinA} = \frac{sin^2 A + cos^2 A}{sinA} = \frac{1}{sinA}$

A = B = C

þá er:

A = C

Þá er: $\text{sinA} + \frac{cos^2 A}{sinA} = \frac{1}{sinA}$ **og A = C** **Sönnun lokið.**

6.5 Eiginleikareglur

Skoðum nú reglur sem ég hef kosið að kalla eiginleikareglur. Það eru reglur um tvöföldun og samlagningu og frádrátt á þeim félögum cos og sin. Þetta eru ekki ósvipaðir eiginleikar og í margföldun og samlagningu talna. Mér finnst gott ef hægt er að teikna regluna upp í einingahringinn þannig að reglan birtist ekki bara sem tákn heldur líka sem mynd, sem er gott því við hugsum í myndum. Það er erfitt að teikna upp eiginleikareglur inn í einingahringinn. Hinsvegar á að vera auðvelt að skilja reglurnar út frá útreikningum.

Skoðum tvöföldunarreglurnar: $\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A$

Dæmi:

Ef $A = 30°$ þá er $2 \cdot A = 60°$

$\sin 30° = 0{,}5$

$\sin(2 \cdot 30°) = \sin 60° = \underline{0{,}8660}$

Þetta má einnig sýna með eiginleikareglu:

Dæmi:

Finndu $\sin 2A$ ef $A = 30°$

$\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A$

$\sin(2 \cdot 30°) = \sin 60° = 2\sin 30° \cdot \cos 30°$

$2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8660 = \underline{0.8660}$

Þetta er ekki annað en einföld innsetning inn í regluna um sin af tvöföldun horna.

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

Dæmi:

Ef $A = 30°$ þá er $2A = 60°$

$\cos 30° = 0,8660$

Þetta má einnig sýna með reglunni um tvöföldun horna.

Dæmi:

Finndu cos 2A ef $A = 30°$	**Á reiknivélinni:**
$\cos s2A = \cos^2 A - \sin^2 A$	**$\cos 30° = 0,8660$**
$\cos 2A = 0,8660^2 - 0,5^2$	**$\sin 30° = \underline{0,5}$**
$\cos 2A = 0,75 - 0,25$	
$\cos 2A = \underline{0,5}$	

Aftur einföld innsetning inn í regluna um cos af tvöföldun horna. Skoðum nú reglur um samlagningu og frádrátt horna.

$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$

Dæmi:

$A = 40°$ og $B = 20°$ Þá er $A + B = 40° + 20° = 60°$

$\sin 60° = \underline{0{,}8660}$

Notum nú regluna í sýnidæmi.

Dæmi:

Finndu $\sin(A + B)$ ef $A = 40°$ og $B = 20°$

$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin A$

$\sin(40° + 20°) = \sin 40° \cdot \cos 20° + \cos 40° \cdot \sin 20°$

$\sin 60° = 0{,}6428 \cdot 0{,}9397 + 0{,}7660 \cdot 0{,}3420$

$\sin 60° = 0{,}6040 + 0{,}2620$

$\sin 60° = \underline{0{,}8660}$

<u>Prófun:</u>

Með einfaldri innsetningu má sjá að: $\sin(40° + 20°) = \sin 60° = \underline{0{,}8660.}$

Skoðum nú regluna: $\sin(A - B) = \sin \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$

Dæmi:

A = 60° og B = 20°   Þá er sin(60°- 20°) = sin40° = <u>0,6428</u>

Með frádráttarreglunni fyrir sin mundi þetta líta svona út.

Dæmi:

Finndu sin(A + B) ef A = 60° og B = 20°

$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$

$\sin(60° - 20°) = \sin 60° \cdot \cos 20° - \cos 60° \cdot \sin 20°$

$\sin 40° = 0{,}8660 \cdot 0{,}9397 - 0{,}5 \cdot 0{,}3420$

$\sin 40° = 0{,}8138 - 0{,}1710$

$\sin 40° = \underline{0{,}6428}$

Aftur má segja að þetta sé tiltölulega auðveld innsetning inn í regluna.

Skoðum nú regluna: $\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$

Dæmi:

A = 40° og B = 20°, þá er cos(40°+ 20°) = cos60° = <u>0,5</u>

Reiknum þetta nú með reglunni:

Dæmi:

Finndu cos(A + B) ef A = 40° og B = 20°

cos(A + B) = cosA·cosB - sinA·sinB

cos(40° + 20°) =cos40°·cos20° - sin40°·sin20°

cos60° = 0,7660·0,9397 - 0,6428·0,3420

cos60° = 0,7198 - 0,2198

cos60° = 0,5

Þetta sýnir að reglan heldur og innsetningin á að vera auðveld. Skoðum nú frádráttarregluna fyrir cos:

cos(A - B) = cosA·cosB + sinA·sinB

Dæmi:

A = 60° og B = 20°   þá er cos(60° - 20°) = cos40° = 0,7660

Notum nú cos - frádáttarregluna til þess að reikna þetta fyrir okkur á næstu síðu.

Dæmi: Finndu cos(A - B) ef A = 60° og B = 20°

cos(A - B) = cosA·cosB + sinA·sinB

cos(60° - 20°) = cos60°·cos20° + sin60°·sin20°

cos40° = 0,5·0,9367 + 0,8660·0,3420

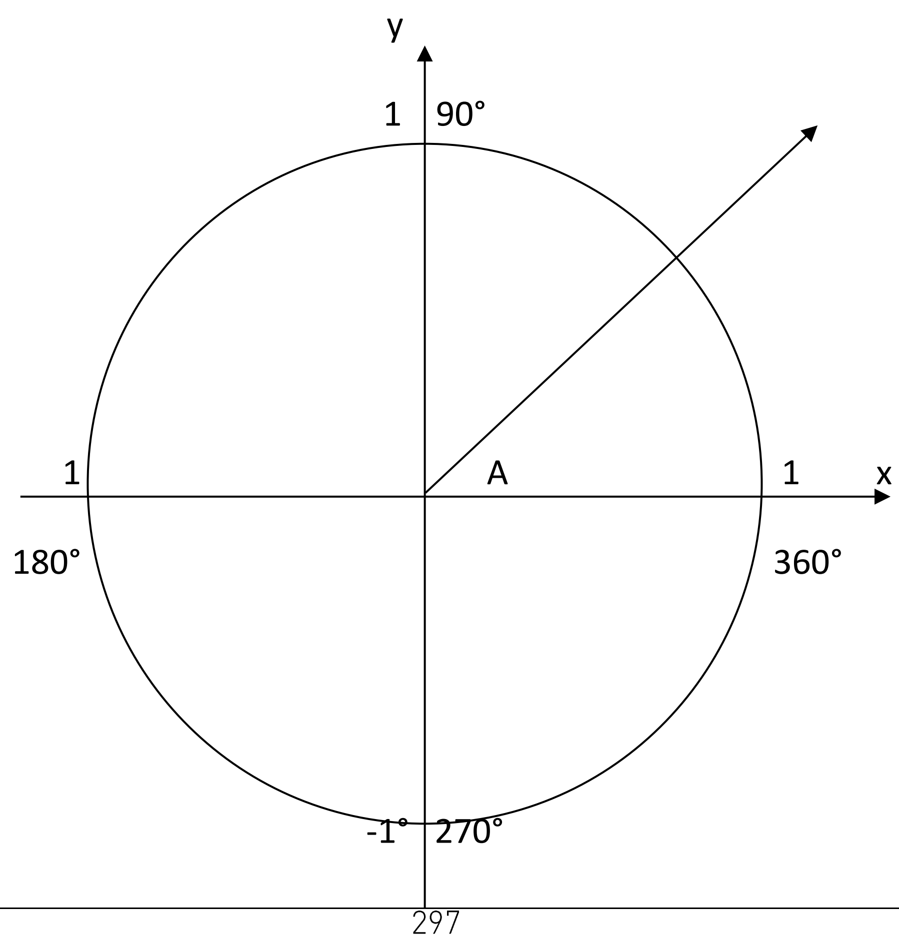
cos40° = 0,4698 + 0,2962

cos40° = <u>0,7660</u>

6.6 Útvíkkun hornahugtaksins

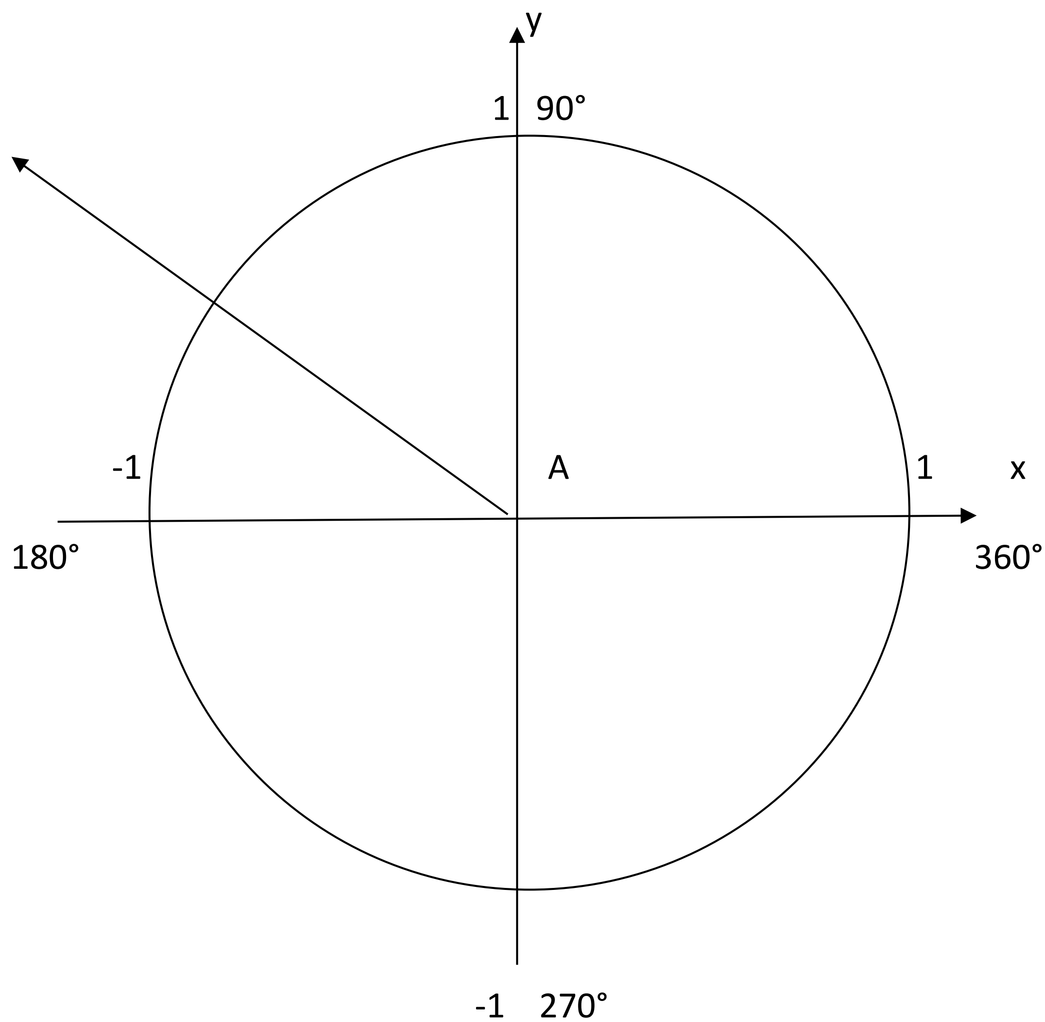
Byrjum rólega á hvössu horni = minna en 90°:

Mynd:



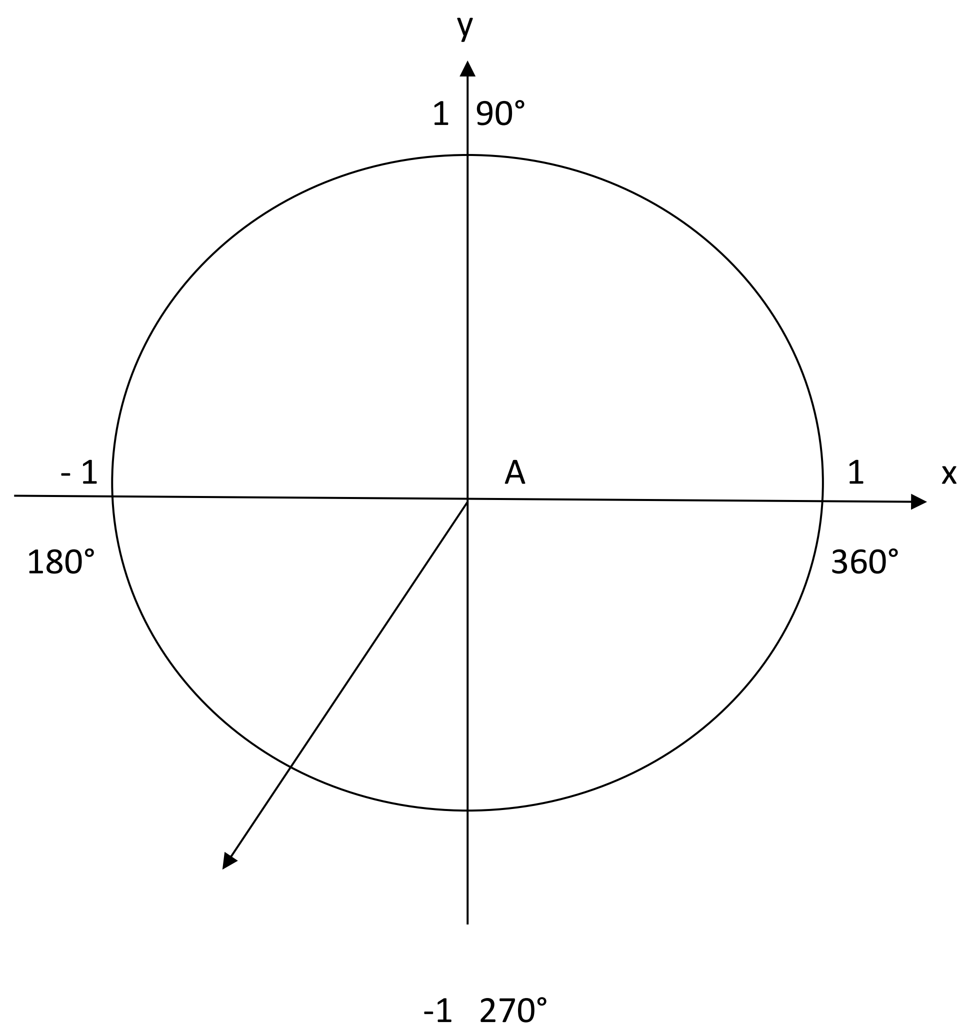
Skoðum því næst gleitt horn þ.e horn sem er stærra en 90°.

Mynd:



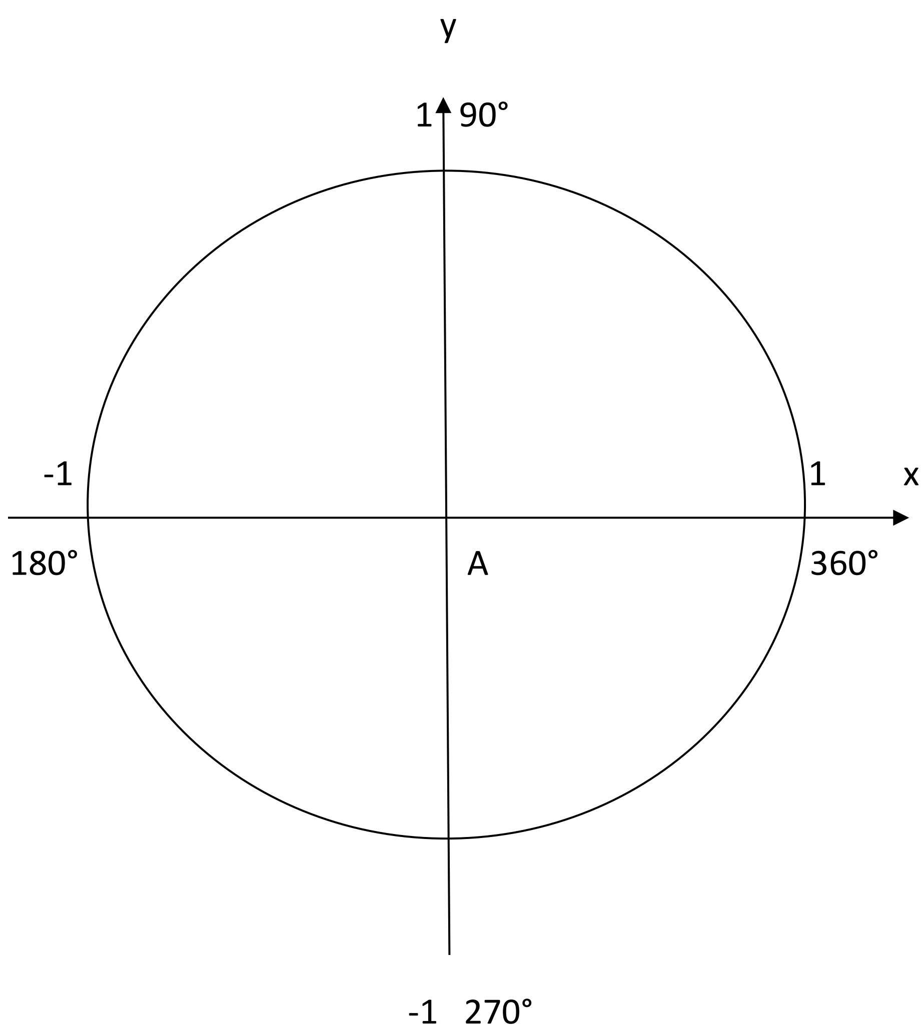
Skoðum því næst horn sem er stærra en 180°. Þá finnst þér jafnvel hornið vera orðið of stórt til þess að vera horn. Ef hornið er 250° þá liti hornið einhvernveginn svona út:

Mynd:



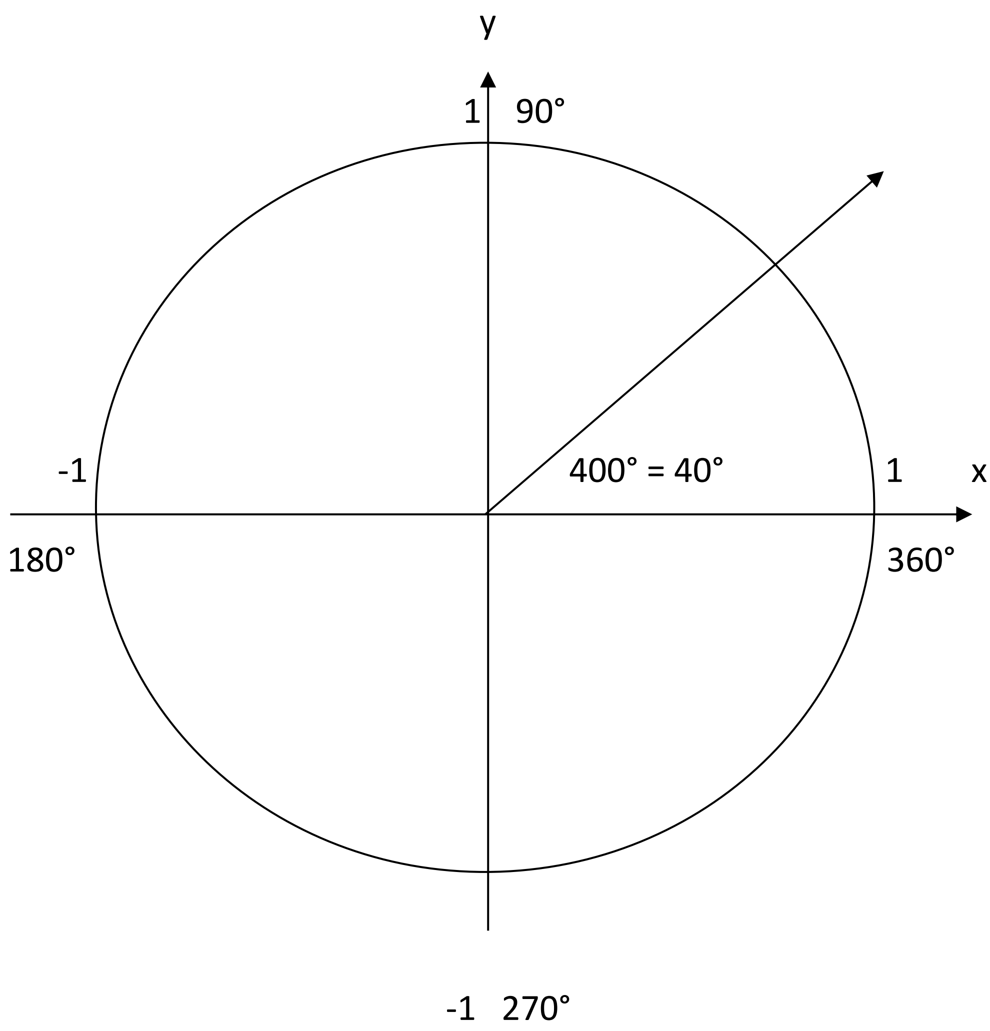
Skoðum síðan horn sem er stærra en 270° t.d 330° horn. Hér er hringurinn og hornið nánast að lokast og hornið orðið nokkuð stórt. Skoðum því næst hvernig 360° horn lítur út en 360° er einmitt hringur. Það að hugsa sér hring sem 360° horn er auðvitað mjög skrítið.

Mynd:



Nú fer að taka í þegar horn er orðið stærra en 360° sem sagt stærra en hringurinn. Hugsum okkur 400° horn, þ.e. 360° og 40° í viðbót. Skoðum það aðeins nánar:

Mynd:



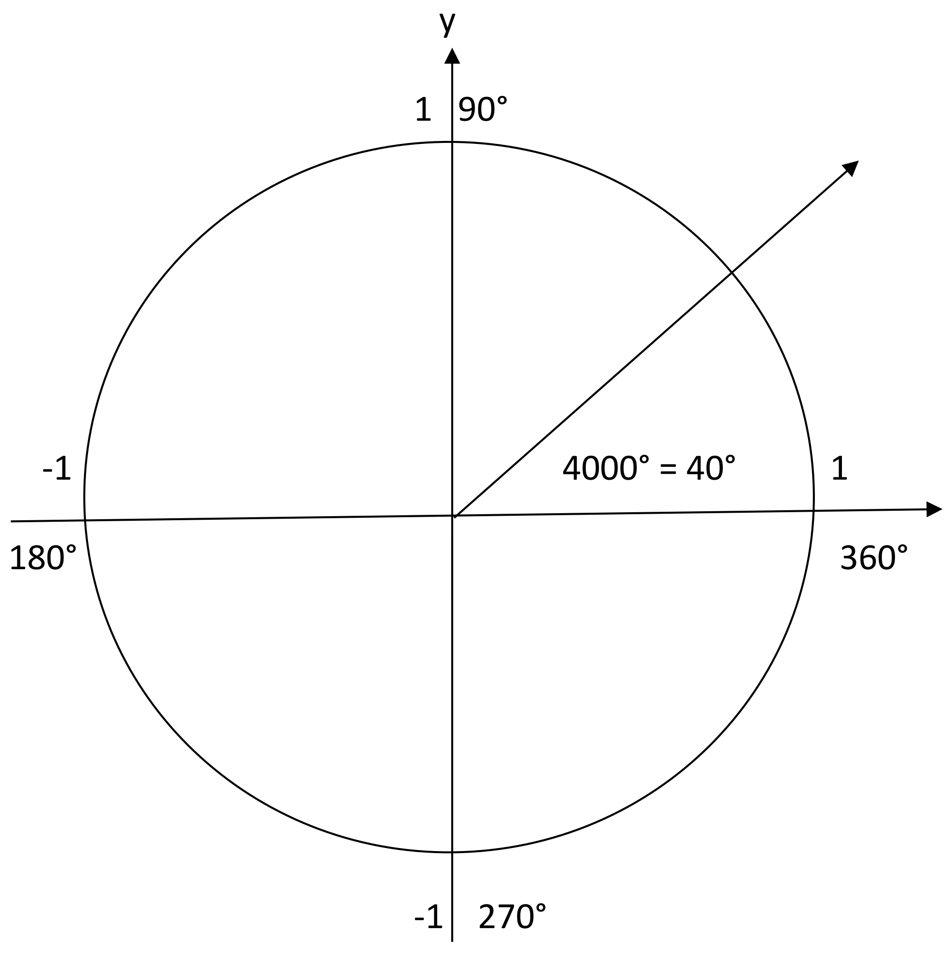
400° horn er stærra en heill hringur. Sé A = 400° þá hefur 400° hornið sama stefnupunkt og 40° hornið. Það þýðir:

$\cos 400° = \cos 40° = 0{,}7660$

$\sin 400° = \sin 40° = 0{,}6428$

Þetta er auðvelt að finna á reiknivélinni þinni. Förum nú í alvarlega útvíkkun á hornahugtakinu og skoðum nú 4000° horn.Það er 11 hringir = $11 \cdot 360° = 3960° + 40° = 4000°$.

Mynd:



Þetta er svolítið skrítið horn en spurðu reiknivélina þína:

cos4000° = cos40° = 0,7660

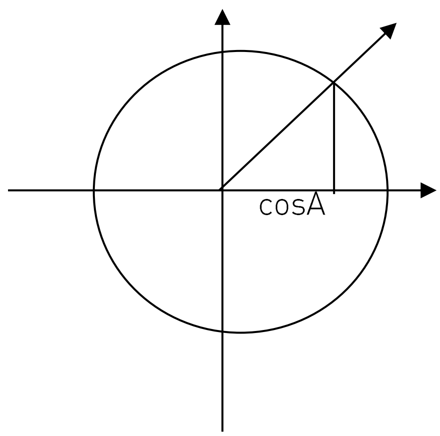
sin4000° = sin40° = 0,6428

Því má segja að 40° hornið hafi sama cos og sin og öll eftirfarandi horn: sjá töflu.
n = fjöldi hringja = 360°·

n	40° + (n·360°)	Horn A
0	40° + (0·360°)	40°
1	40° + (1·360°)	400°
2	40° + (2·360°)	760°
3	40° + (3·360°)	1120°
4	40° + (4·360°)	1480°
5	40° + (5·360°)	1840°
	Og svo framvegis.	

6.7 Hugtakaskrá

cos = cosinus: x - hnit punkts á einingahringnum

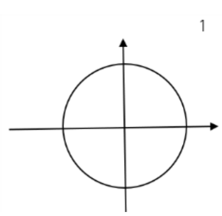


cot = cotangens. cotA = $\frac{cosA}{sinA}$

Delta = Δ. Grískt D tákn fyrir breytingu, t.d: Δx = breytingin á x ás

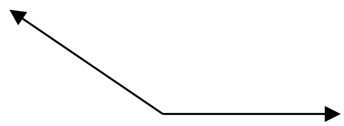
Eiginleikareglur: Reglur um eiginleika horna í einingahring

Einingahringur: Hringur með miðpunkt í (0,0) og með radíusinn 1,0



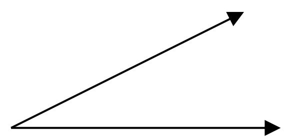
Gráður: Gráður í hring eru 360°

Gleitt horn: Horn sem er stærra en 90°



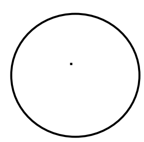
Hálfhringur: Hálfhringur er 180°

Horn: Stærðin á milli tveggja arma

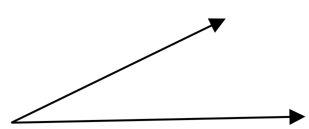


Hornafallaeiningin: Nafn á regluna: $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

Hringur: Allir punktar jafnlangt frá miðpunkti o

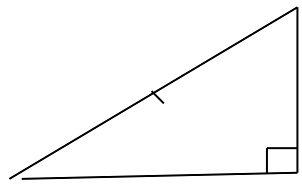


Hvasst horn: Horn sem er minna en 90°



Innsetning: Setja inn í reglu eða sönnun til þess að fá rétt út

Langhlið: Lengsta hliðin í 90° þríhyrningi, sem er á móti 90° horninu



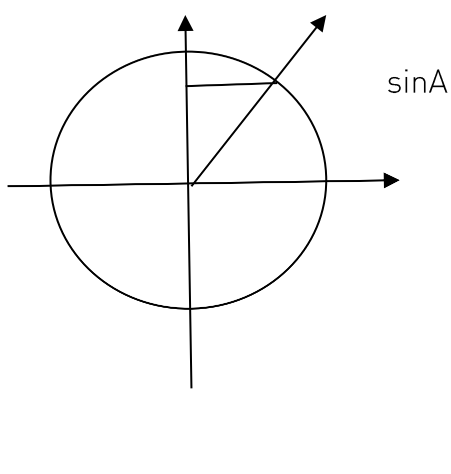
Lota: Lotan = endurtekningin í einingahringnum. Hún er 360° fyrir cos og sin, en 180° fyrir tan

Pýþagórasarregla: $a^2 + b^2 = c^2$ gildir um 90°þríhyrninga

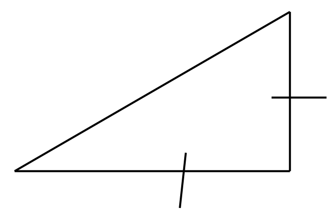
Samlagningareglur: Reglur um samlagningu horna í einingahringnum

SHIFT: SHIFT - takkinn í vinstra horninu á reiknivélinni

sin = sinus. y - hnit punkts á einingahring



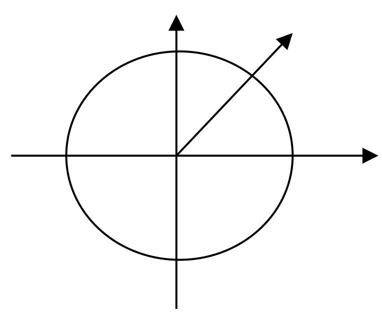
Skammhlið: Skemmri hliðarnar í 90° þríhyrningi



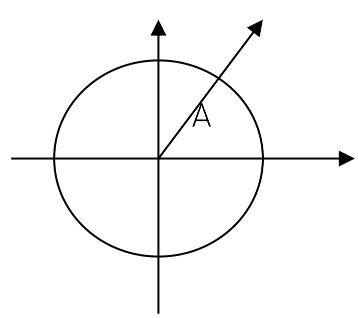
Snúningsreglur: Reglur um snúninga í einingahring

Speglunarreglur: Reglur um speglanir í einingahringnum

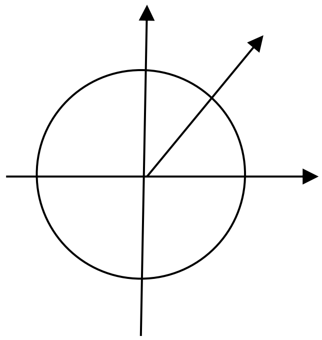
Stefnuás horns: Armur horns í einingahring



Stefnuhorn: Horn í einingahring



Stefnupunktur: Skurðpunktur einingahrings og stefnuáss



Sönnun: Að sanna stærðfræðireglu

Ef A = B = C þá er A = C

Tan = tangens. tanA = $\frac{sinA}{cosA}$

Tvöföldunarreglur: Reglur um tvöföldun horna í einingahring

Útvíkkun hornahugtaksins: Þegar horn í einingahringnum verða stærri en 360°

t.d. 4000° horn = 11▪360 + 40°