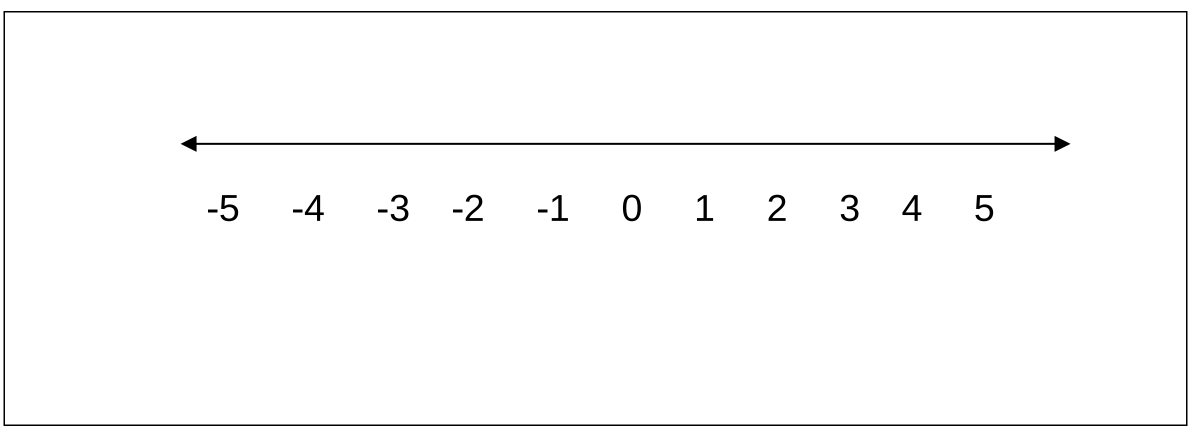
5.kafli: Að lesa jöfnur í hnitakerfi I - Jafna beinnar línu og fleygbogar

5.1 Hnitakerfið

Farir þú á stærðfræðibraut í framhaldsskóla má segja að stóra verkefnið í þrjú ár eða sex annir sé að kortleggja hnitakerfið, þ.e að vinna með jöfnur í hnitakerfinu. Líkja má hnitakerfinu við landakort, með lengdar- og breiddarbauga. Stóra verkefnið á stærðfræðibraut er að kortleggja þær reglur sem gilda í heiminum, í planinu (á jörðinni).

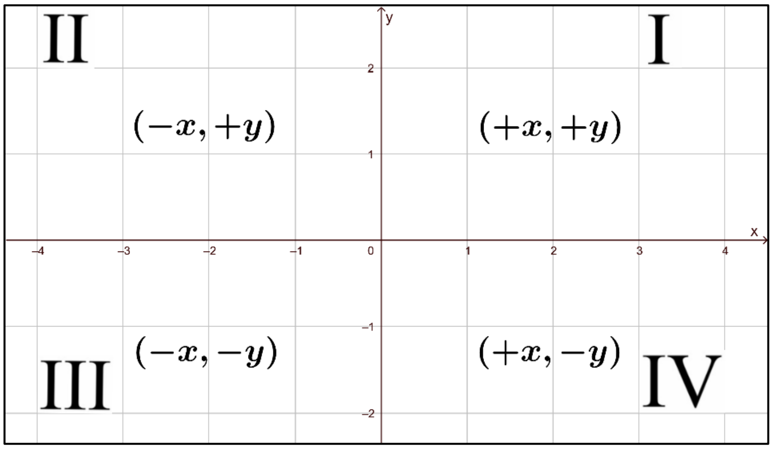
5.1.1 Talnalínan

Talnalínan hefur 0 - punkt. Hægra megin við hann eru + tölur og vinstra megin við hann eru – tölur.



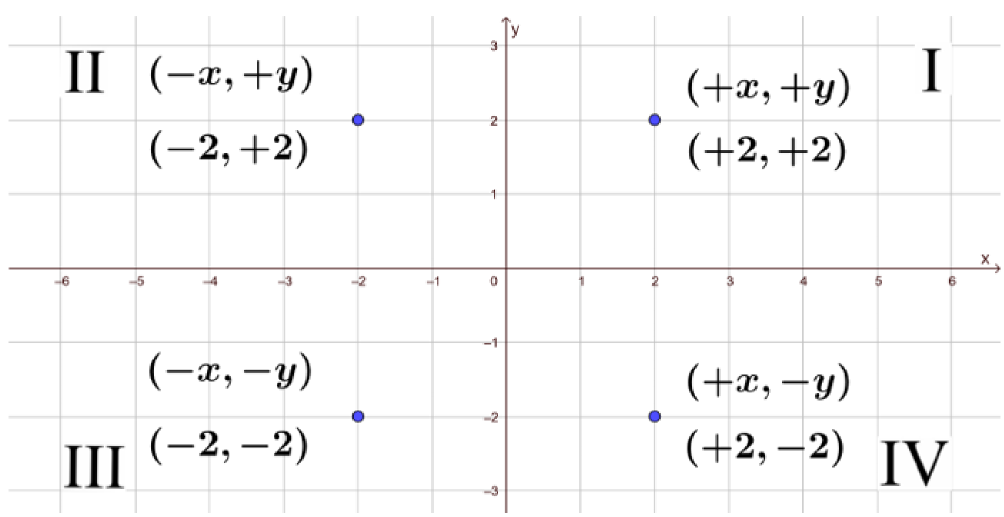
5.1.2 Fjórðungar hnitakerfisins

Hnitakerfið er tvær talnalínur, hornréttar hvor á aðra og skerast í 0 - punkti.



Þannig myndast fjórir fjórðungar sem eru númeraðir rangsælis frá 1 - 4. Hver fjórðungur hefur mismunandi formerki á hnitunum, talnaparinu (x,y). Fyrst er lesið á x - ásinn, síðan á y - ásinn og þannig myndast punkturinn (x,y) í hnitakerfinu.

Sýnidæmi:



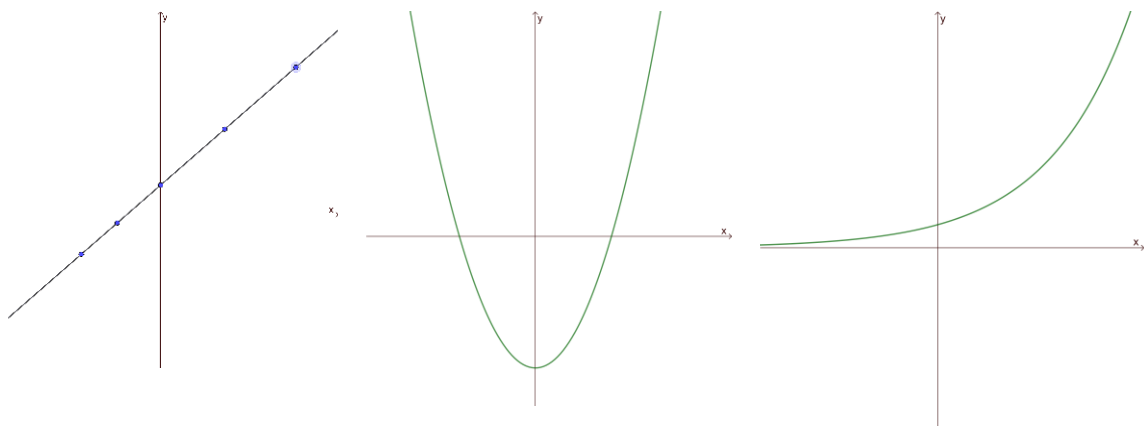
Dæmi:

Punkturinn (x,y) = (- 151, - 207) mundi þá vera í þriðja fjórðungi

5.1.3 Jöfnur

Stærðfræði hnitakerfisins mætti kalla jöfnustærðfræði. Jafnan myndar feril í hnitakerfinu, sem er samsettur úr óteljandi punktum. Jafnan sýnir þér sambandið á milli x - ássins og y – ássins eða hvernig punktarnir (x,y) raðast inn í hnitakerfið og mynda feril.

Dæmi:



Bein lína **Fleygbogi** **Veldisfall**

Segja má að þú fáir þrjú ný tæki til þess að vinna með, þau eru:

1. **Jafnan**
2. **Gildistafla**
3. **Hnitakerfið**

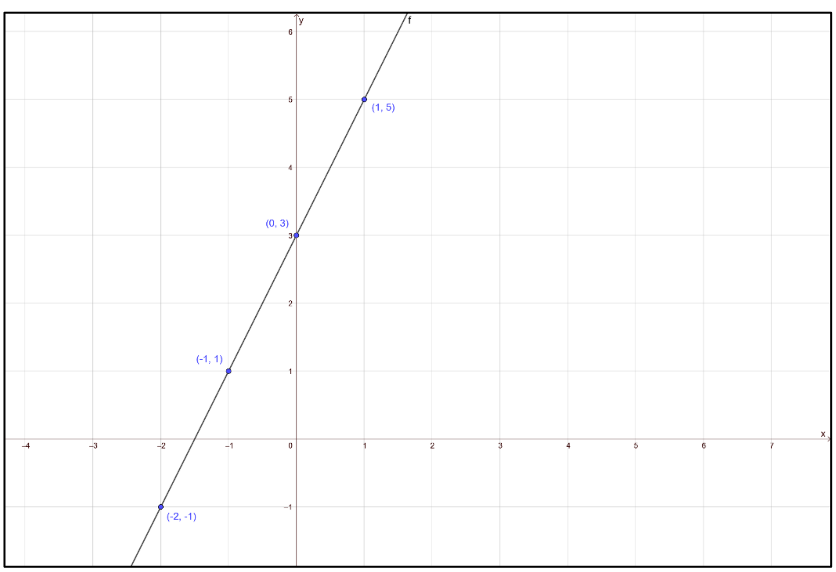
1. Jafnan: $y = 2x + 3$ sýnir sambandið á milli x - ássins og y – ássins

2. Gildistaflan: sýnir þetta samband á milli x - ássins og y ássins

x	y = 2x +3	y	(x,y)
-2	$y = 2\cdot(-2) + 3$	-1	(-2,-1)
-1	$y = 2\cdot(-1) + 3$	1	(-1,1)
0	$y = 2\cdot(0) + 3$	3	(0,3)
1	$y = 2\cdot(1) + 3$	5	(1,5)
2	$y = 2\cdot(2) + 3$	7	(2,7)

Gildistaflan sýnir hvernig sérhvert x myndar sérhvert y = (x,y) og til verða punktarnir (x,y) sem síðan mynda línuna.

3. Hnitakerfið: sýnir hvernig punktarnir mynda ferilinn í hnitakerfinu. Öll þessi tæki: jafnan, gildistaflan og hnitakerfið eru birtingarform sama fyrirbærisins = sambandsins á milli x og y.



5.2 Bein lína

Þótt bein lína sé vissulega alltaf bein þá hallast hún ekki alltaf eins.

5.2.1 Hallatala 1

Hallatala segir til um halla línunnar og er það hugtak sem hefur einna mesta dýpt í framhaldsskólastærðfræðinni.

Skilgreining 1:

Hallatala er breytingin á y ás =Δy sem verður við það að fara eina einingu til hægri á x - ás. =Δx

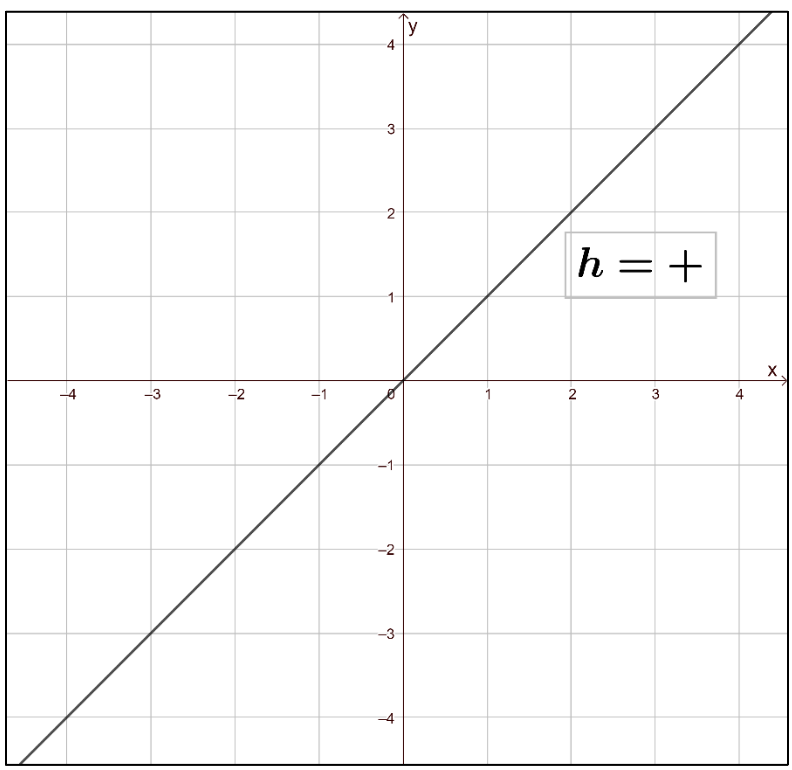
Lína sem er

á leið upp í

lesáttina til hægri

er með jákvæða

+ hallatölu.



Lína sem er

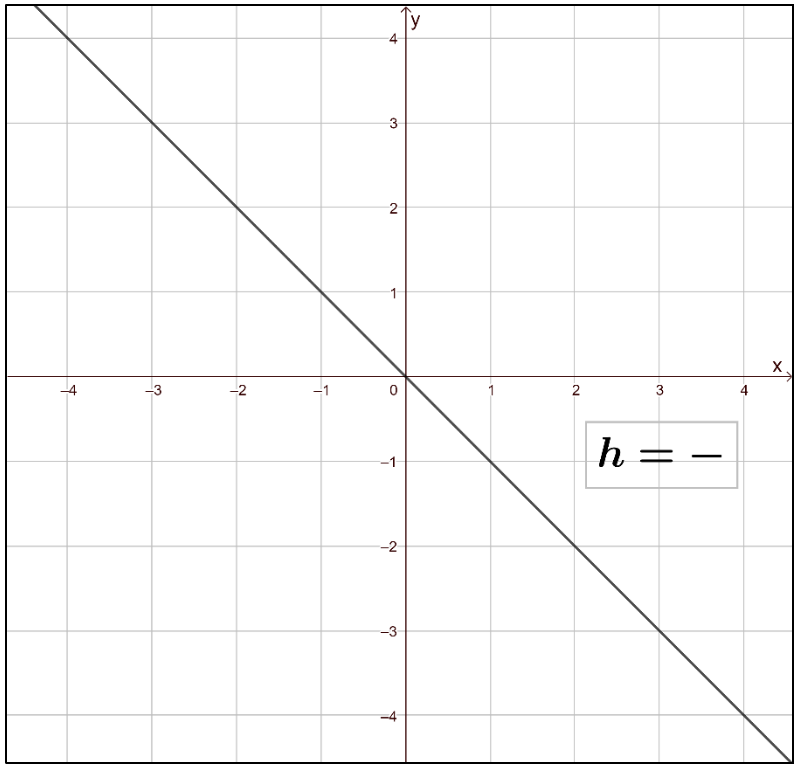
á leið niður í

lesáttina til

hægri er með

neikvæða

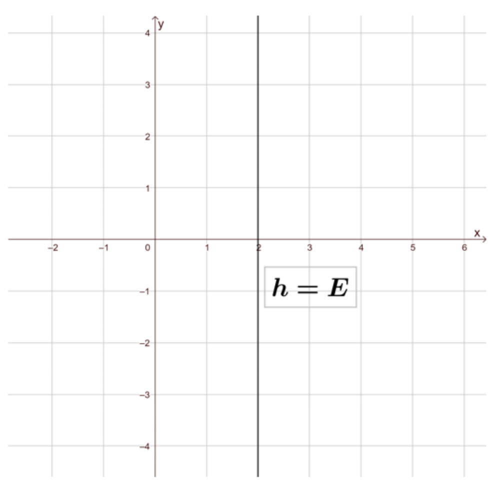
- hallatölu.



Þegar þú ætlar að skilgreina halla lóðréttrar línu lendir þú í vandræðum því ekki er hægt að meta breytingu á einni einingu á x- ás í lesátt, (til hægri). Því er sagt að ekki sé hægt að skilgreina hallatölu lóðréttrar línu og þá er h = Error.

Dæmi:

Hver er hallatala lóðréttrar línu sem fer í gegnum x = 2 á bilinu 0 - 1 á x ás? Það er ekki hægt að skilgreina það. h = Error.



5.2.2 Hallatala 2

Grunnskilgreining hallatölunnar gerir ráð fyrir því að þú farir eina einingu til hægri á x - ás. Sjáum hvað gerist ef þú ferð lengra eftir x - ásnum.

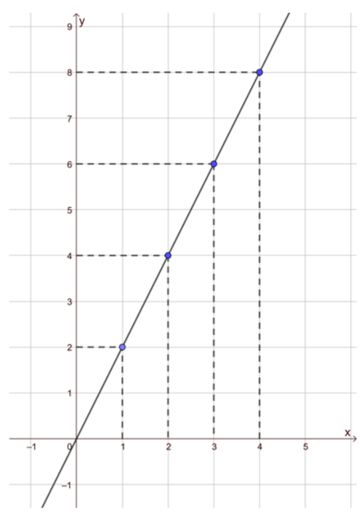
Skilgreining 2:

$$h = \frac{\text{Breytingin á } y\text{–ás}}{\text{Breytingin á } x\text{–ás}} \quad = \quad h = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dæmi:

Hallatala línunnar er h = 2

$$h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \underline{\underline{2}}$$



Lífið er ekki alltaf heilar tölur. Hallatala línu getur einnig verið brot. Þá er gott að horfa í gegnum skilgreininguna:

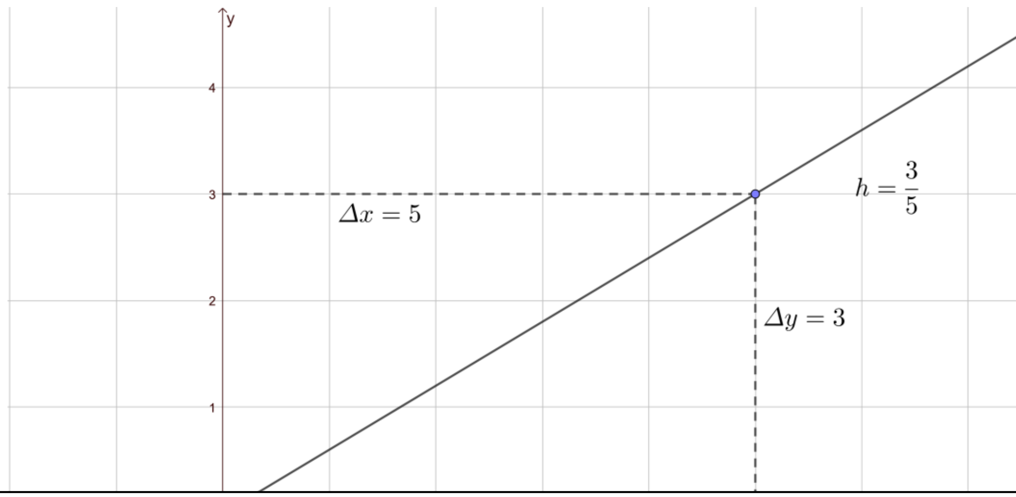
$$h = \frac{\text{Breytingin á } y\text{–ás}}{\text{Breytingin á } x\text{–ás}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Þar sem tákið Δ = "delta" sem er grískt D og er tákn fyrir breytingu.

Dæmi:

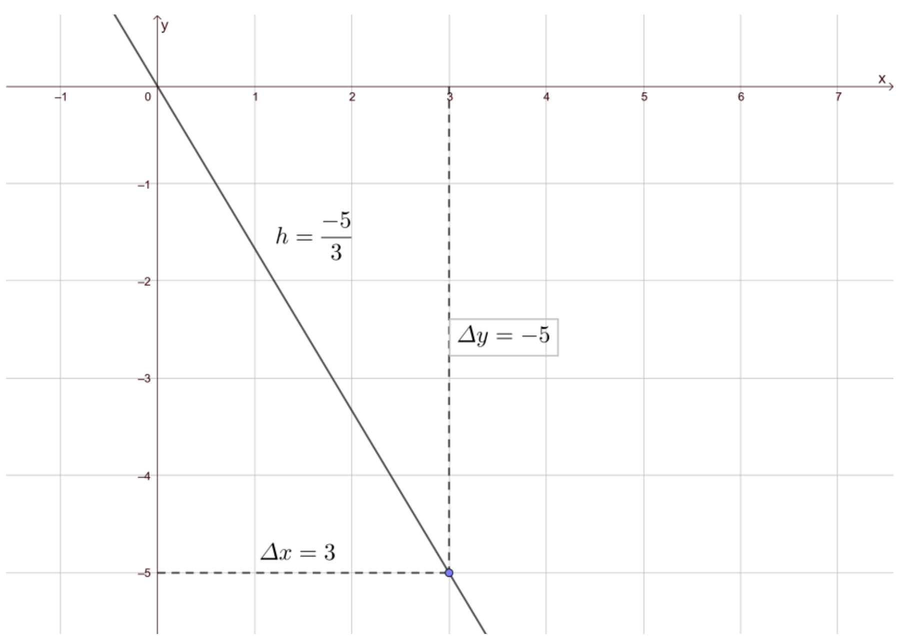
Lína sem á 5 einingum á x - ás hækkar sig um 3 einingar á y - ás hefur hallatöluna

$$h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}$$



Dæmi:

Lína sem á 3 einingum á x - ás, lækkar sig um 5 einingar á y - ás hefur hallatöluna $h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{3}$



5.2.3 Hallatala 3

Einnig er hægt að reikna hallatölu línu ef þú veist tvo punkta á línunni. Þá notar þú hallatöluformúluna.

Hallatöluformúla: $h = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

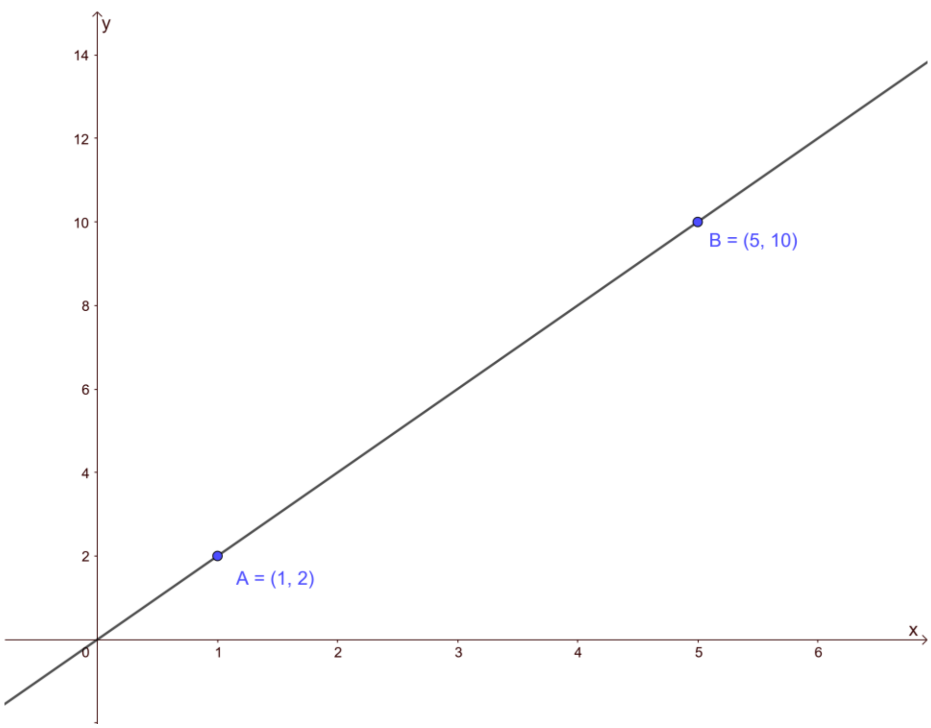
Dæmi:

Lína liggur í gegnum punktana A = (1,2) og B = (5,10) Hver er hallatala hennar?

Merkjum upp punktana A = (1,2) = (x_1 y_1) og

B = (5, 10) = (x_2 y_2).

Þá er innsetningin skýr og einföld: $h = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{10-2}{5-1} = \dfrac{8}{4} = \underline{2}$



Það sem er varasamt í innsetningu inn í formúlu eins og hallatöluformúluna er það þegar þú setur mínustölu inn í mínusinn í formúlunni þá gerist það (-) · (-) = + sem er notaleg og góð klaufavillugildra.

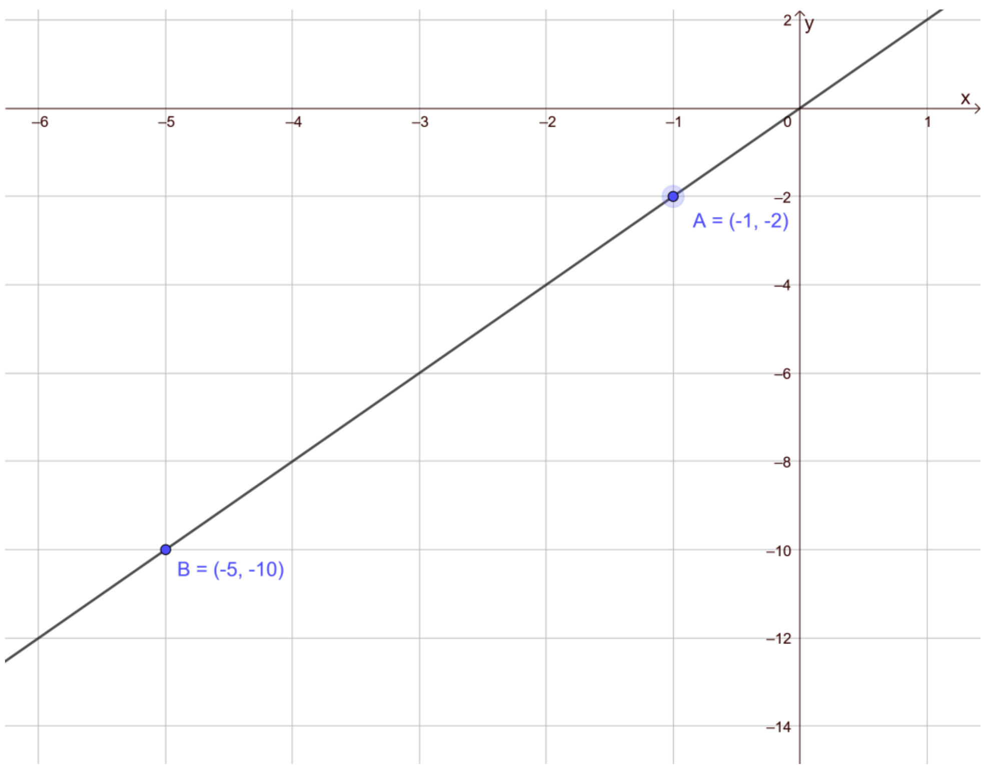
Dæmi:

Bein lína liggur í gegnum punktana A =(-1,-2) = (x_1y_1) og B = (-5,-10) = (x_2y_2).

Hver er hallatala hennar?

Þá er innsetningin skýr og einföld, athuga þó vel formerkjabreytingar.

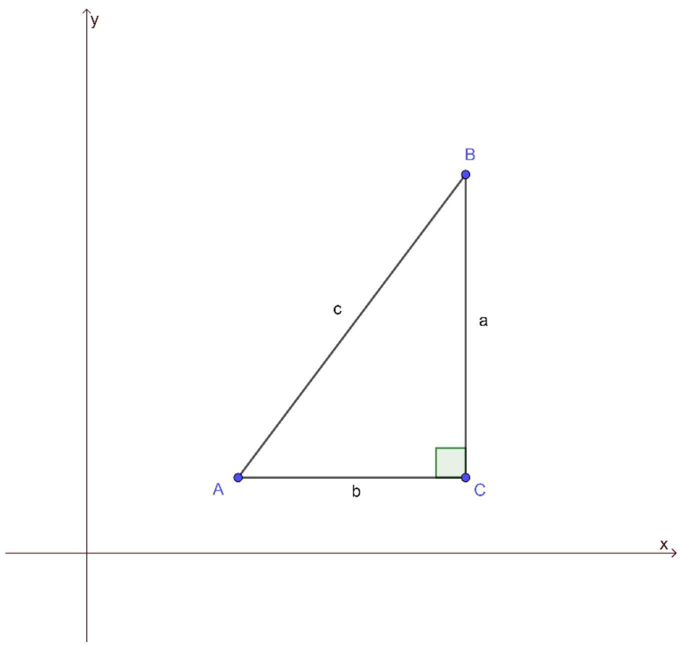
$$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10-(-2)}{-5-(-1)} = \frac{-10+2}{-5+1} = \frac{-8}{-4} = 2$$



5.2.4 Fjarlægðarformúlan

Að finna fjarlægð milli tveggja punkta á línu er í raun pýþagórísk pæling þar sem hægt er að hugsa sér strik á á milli tveggja punkta sem langhlið í 90° þríhyrningi.

Mynd:



Þar sem $a^2 + b^2 = c^2$

Fjarlægðarformúlan: $f = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1}\,)^2$

f = Fjaræegð, lengdin á milli punktana.

Þegar þú ert búin/n að reikna út lengdina á ($x_2 - x_1$) og ($y_2 - y_1$), þá er í raun um að ræða Pýþagórasarreglu. $a^2 + b^2 = c^2$. Sjá næsta sýnidæmi.

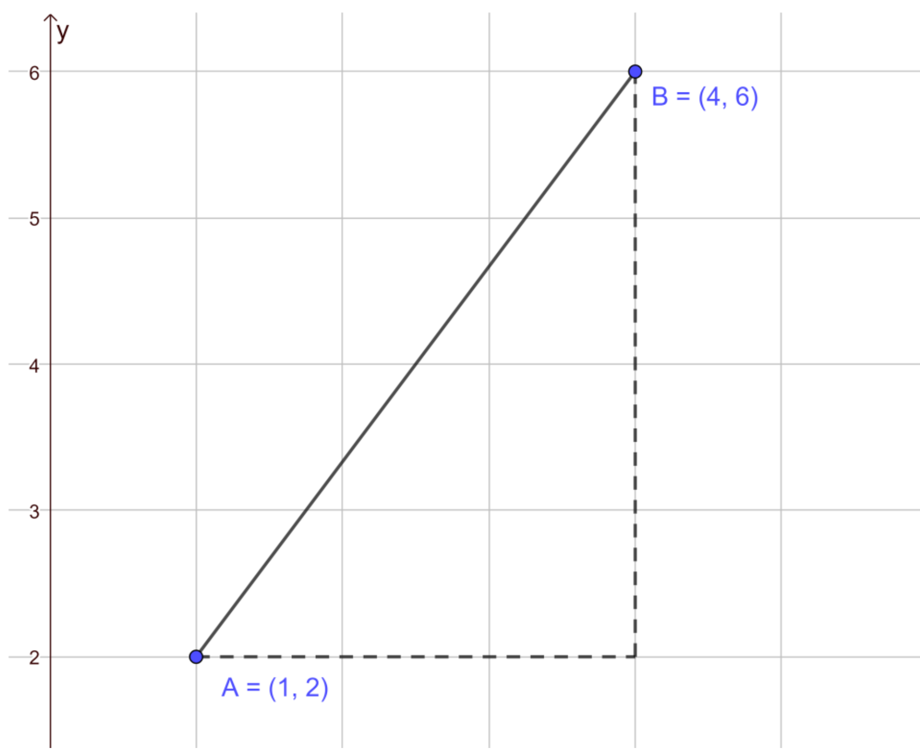
Dæmi:

Finndu fjarlægðina á milli punktanna A = (1,2) = ($x_1 y_1$) og B = (4,6) = ($x_2 y_2$)

f = $\sqrt{(\ x_2 - x_1\ )^2 + (\ \ y_2 - y_1\ \ )^2}$

f = $\sqrt{(\ 6 - 2\ )^2\ +\ \ (\ 4\ - 1\ )^2}$

f = $\sqrt{4^2\ +\ 3^2}$ $= \sqrt{16 + 9}\ =\ \sqrt{25}\ = \underline{5}$



5.2.5 Miðpunktaformúlan

Að finna miðpunkt striks = n, er í raun eins og að taka meðaltal af x - gildunum og taka meðaltal af y - gildunum og finna þannig miðpunktinn (x,y).

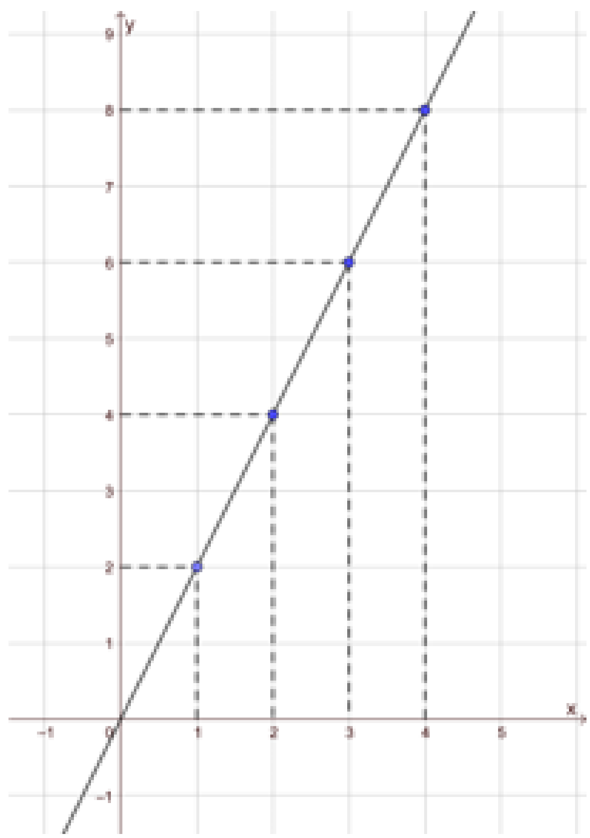
Miðpunktaformúlan:

m = $\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right), \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)$

Dæmi:

Hallatala línunnar er h = 2

h = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \underline{2}$



Innsetning inn í allar þessar þrjár formúlur á að vera einföld þegar búið er að merkja punktana upp A = (x_1, y_1) og B = (x_2, y_2).

Hallatöluformúlan:

h = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Fjarlægðarformúlan:

f = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \quad (y_2 - y_1)^2}$

Miðpunktaformúlan:

m = $\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$

Athugaðu vel innsetningu á (- tölu) inn í formúlurnar þar sem er (-) í formúlunni. Þetta getur gerst í hallatöluformúlunni og fjarlægðarformúlunni. Athugaðu að skoða þetta vel (- · - = +).

5.3 Jafna beinnar línu

Jafna beinnar línu á þrjú birtingarform. Jafna beinnar línu er fyrsta stigs jafna, þ.e. x^1 það er x - ið er í fyrsta veldi.

Punkthallaformið:

$y - y_1 = h(x - x_1)$

Skurðhallaformið:

$y = hx + q$

Almenna formið:

$ax + by + c = 0$

Það fer eftir því hvernig stærðunum er raðað og þær einangraðar hvaða form þú færð en öll eru þau sama jafnan = jafna beinnar línu.

5.3.1 Punkthallaformið

$y - y_1 = h(x - x_1)$ h = hallatala og (x_1, y_1) = punkturinn.

Þetta er gott vinnuform til þess að finna jöfnu beinnar línu ef þú veist hallatöluna (h) og einn punkt (x_1, y_1).

Dæmi:

Finndu jöfnu beinnar línu, sem hefur hallatöluna 3 og fer í gegnum punktinn (1,2).

$h = 3$ og $x_1 = 1$ og $y_1 = 2$.

$y - y_1 = h\,(x - x_1)$ **Innsetning:**

$y - 2 = 3\,(x - 1)$

$y - 2 = 3x - 3$

$y = 3x - 3 + 2$

$\underline{y = 3x - 1}$

Athugaðu vel ef í innsetningunni er (- tala) sett inn í (-) í formúlunni.

5.3.2 Skurðhallaformið

$y = hx + q$

h = hallatalan

q = skurðpunkturinn við y - ás

x og y sýna sambandið á milli x - ássins og y - ássins

Ef þú veist einn punkt (x,y) og hallatöluna þá getur þú einangrað og reiknað úr q og þannig fundið jöfnuna fyrir beina línu.

Dæmi:

Finndu jöfnu b einnar línu sem hefur hallatöluna 3 og fer í gegnum punktinn (1,2).

$h = 3$, $x = 1$ og $y = 2$ þá er innsetningin auðveld.

$y = hx + q$	Jafnan er því:
$2 = 3 \cdot 1 + q$	$y = hx + q$
$2 = 3 + q$	$\underline{y = 3x - 1}$
$2 - 3 = q$	

$q = -1$ sem er skurðpunkturinn við y - ás.

5.3.3 Að finna jöfnu beinnar línu

Til þess að finna jöfnu beinnar línu þarft þú að vita tvennt:

1. Hallatöluna =h.
2. Einn punkt á línunni (x,y)

Dæmi:

Finndu jöfnu línunnar gegnum punktana A = (2,3) = (x_1 , y_1) og

B = (6,11) = (x_2 , y_2).

1. Finna hallatöluna:

h = $\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ h = $\frac{11-3}{6-2}$ = $\frac{8}{4}$ = $\underline{2}$

2. Finna jöfnuna. Nú getur þú notað punkthallaformið: $y - y_1 = h\,(x - x_1)$ eða skurðhallaformið: $y = hx + q$. Einnig getur þú notað punktinn (2,3) eða (6,11).

Punkthallaformið $y - y_1 = h(x - x_1)$ $h = 2$, $x_1 = 2$ og $y_1 = 3$

$y - 3 = 2\,(x - 2)$

$y - 3 = 2x - 4$

$y = 2x - 4 + 3$

$\underline{y = 2x - 1}$

Eða skurðhallaformið:

$y = hx + q$ $h = 2$, $x = 6$ og $y = 11$

$11 = 2 \cdot 6 + q$	Jafnan er því:
$11 = 12 + q$	$y = hx + q$
$11 - 12 = q$	$y = 2x - 1$
$q = -1$	

Þú sérð að þú getur notað bæði form jöfnunnar: punkthallaformið: $y - y_1 = h(x - x_1)$ og skurðhallaformið: $y = hx + q$ og hvaða punkt sem er af línunni til þess að finna jöfnu línunnar.

5.3.4 Skurðhallaformið/jöfnulæsi

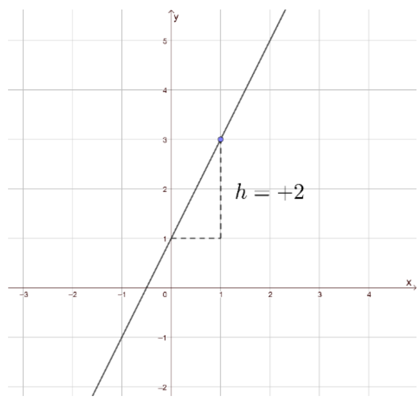
y = hx + q

q er alltaf skurðpunktur línunnar við y - ás

h er alltaf hallatalan

Dæmi:

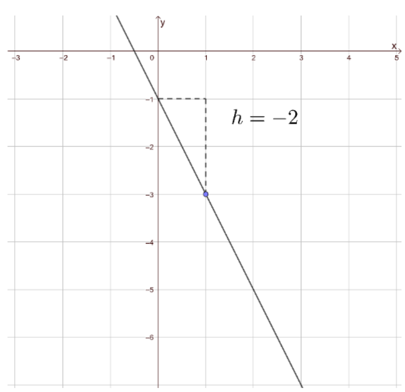
Teiknaðu jöfnuna y = 2x +1 inn í hnitakerfið. h = 2 og skurðpunktur við y - ás = 1.



Dæmi:

Hver er jafna línunnar y = hx +q ef hallatalan er (- 2) og hún sker y - ásinn í (- 1).

Jafnan er y = -2x -1.   Sjá mynd.



5.3.5 Almenna formið

Almenna formið er ekki beint vinnuform jöfnunnar heldur má kalla almenna formið sparibúning jöfnunnar.

Almenna formið: ay + bx + c = 0

Dæmi:

Ritaðu jöfnuna 4y + 8x +12 = 0 á skurð halla forminu: y = hx +q

4y +8x +12 = 0 Einangra fyrir y

4y = -8x -12

$\frac{4y = -8x - 12}{4}$ Deila með 4 í gegnum jöfnuna

y = -2x -3

Dæmi:

Skrifaðu jöfnuna á almenna forminu

y = 3x + 4 Núlla jöfnuna í hægri hlið

y - 3x -4 = 0

5.3.6 Samsíða línur

Tvær línur eru samsíða ef hallatölur þeirra eru þær sömu. Þá hafa þær sömu hallatölu. $\mathbf{h_1 = h_2}$

Dæmi:

Eru línurnar $y = \underline{3}x + 2$ og $y = \underline{3}x - 4$ samsíða?

Já þær eru það því þær hafa sömu hallatölu $h = 3$

Dæmi:

Eru línurnar $y = -2x + 3$ og $2y + 4x + 10$ samsíða?

Til að svara því þarf fyrst að einangra fyrir y í jöfnunni $2y + 4x + 10 = 0$

$$2y + 4x + 10 = 0$$

$2y = -4x - 10$ Deila með 2 í gegnum alla jöfnuna.

$$y = -2x - 5$$

Já þær eru samsíða báðar línurnar hafa hallatöluna $h = -2$.

5.3.7 Hornréttar línur

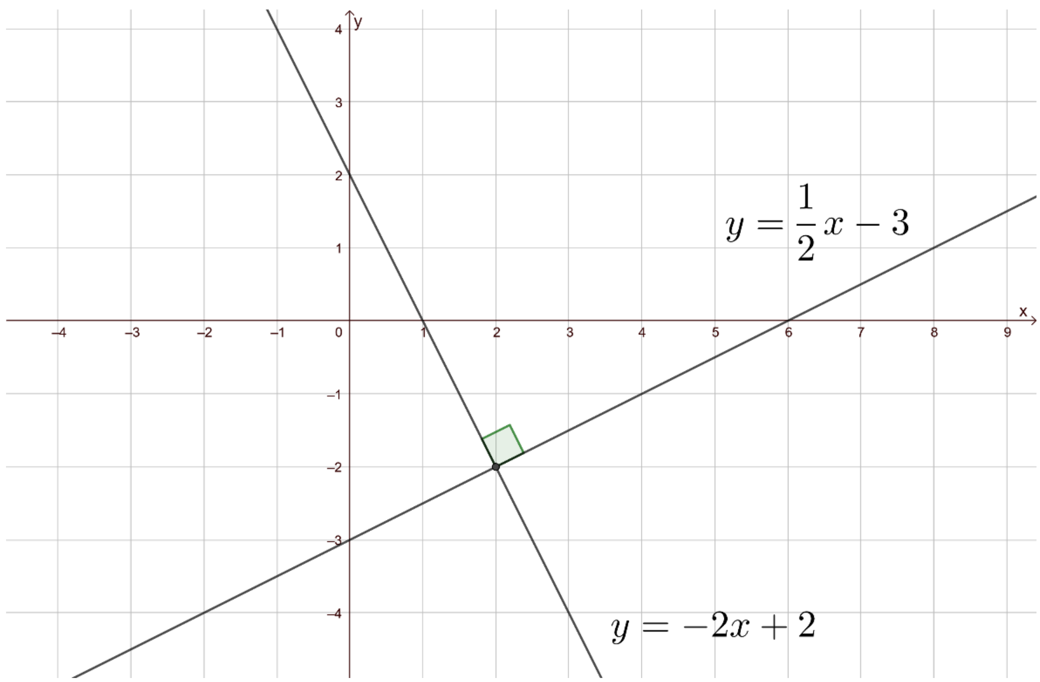
Tvær línur eru hornréttar ef hallatölur þeirra margfaldaðar saman gefa svarið = (- 1). $h_1 \cdot h_2 = -1$

Dæmi:

Eru línurnar y = $\underline{-2}$x + 2 og y = $\underline{1/2}$x -3 hornréttar?

$h_1 \cdot h_2 = -1$ $h_1 = -2$ og $h_2 = 1/2$

(-2) · 1/2 = -1 Já þær eru hornréttar hvor á aðra



Eins og sést hér að framan þá er að mörgu að hyggja þegar bein lína er annarsvegar. Þetta þarf að lesa vel til þess að skilja það vel. Síðan þarf að lesa þetta oft yfir, ég segi fimm sinnum til þess að muna þetta vel, t.d. fyrir próf.

Höldum nú áfram að skoða hnitakerfið. Lítum næst á annars stigs jöfnu fyrir fleygbogann = $ax^2 + bx + c = 0$

5.4 Fleygboginn-Annars stigs jafnan

Þegar x í jöfnunni er í fyrsta veldi y = hx + q eins og í umfjölluninni hér á undan myndar jafnan alltaf beina línu í hnitakerfinu. Ef hinsvegar x - ið er í öðru veldi = x^2 myndar jafnan alltaf fleygboga. Hann getur opnast upp ∪ verið brosandi eða uppsveigður og þá hefur hann botnpunkt. Hann getur opnast niður ∩ farið í fýlu og verið niðursveigður og þá hefur hann topppunkt. Það er formerkið á ax^2 sem stýrir því hvernig fleygboginn snýr, $+ax^2$ þýðir að hann er brosandi = uppsveigður og hefur þar af leiðandi botnpunkt en $-ax^2$ þýðir hinsvegar að hann er í fýlu = niðursveigður og hefur þar af leiðandi topppunkt.

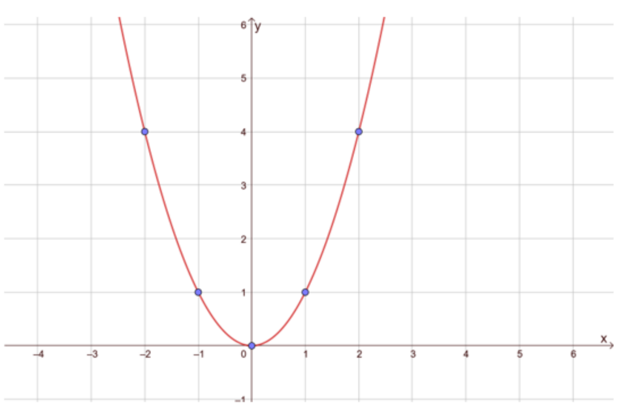
5.4.1 Hvernig snýr fleygboginn?

-Dæmi.

Teikaðu fleygbogann $y = x^2$ inn í hnitakerfi

x	$y = x^2$	y	(x,y)
-2	$y = (-2)^2$	4	(-2,4)
-1	$y = (-1)^2$	1	(-1,1)
0	$y = 0^2$	0	(0,0)
1	$y = 1^2$	1	(1,1)
2	$y = 2^2$	4	(2,4)

Þú sérð að $+ ax^2$ býr til brosandi = uppsveigðan fleygboga.

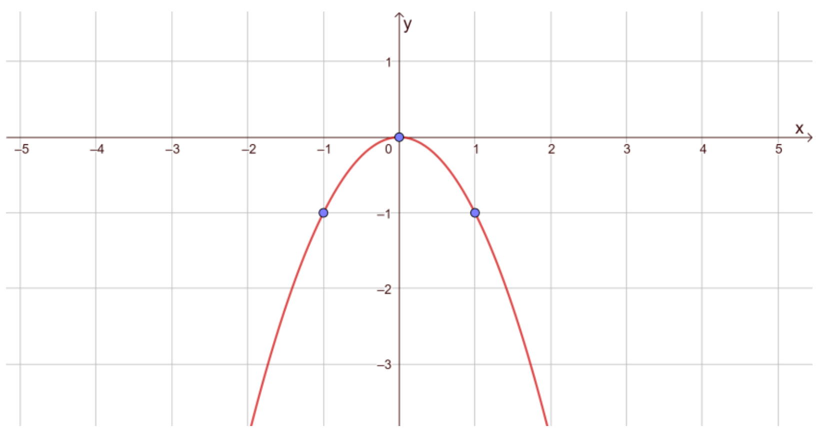


Dæmi:

Teiknaðu fleygbogann $y = -x^2$ inn í hnitakerfi.

x	$y = -x^2$	y	(x,y)
-2	$y = -(-2)^2$	-4	(-2,-4)
-1	$y = -(-1)^2$	-1	(-1,-1)
0	$y = -(0)^2$	0	(0,0)
1	$y = -(1)^2$	-1	(1,-1)
2	$y = -(2)^2$	-2	(- 2,-4)

Þú sérð að $-ax^2$ fer í fýlu = niðursveigðan fleygboga.



5.4.2 Almenna formið: $ax^2 + bx + c = 0$

Í annarsstigsjöfnu verður að koma fyrir x^2, einnig getur komið fyrir x og einnig tala = fasti. Dæmi: $2x^2 + 3x + 4 = 0$ þar er $a = 2$, $b = 3$ og $c = 4$. Samkvæmt almenna forminu:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Við erum líka búin að skoða ef:

$+ax^2$ þá er fleygboginn brosandi = uppsveigður $\cup$
$-ax^2$ þá er fleygboginn í fýlu = niðursveigður $\cap$

Þú getur raðað a, b og c á ýmsa vegu, dæmi:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$
$\mathbf{bx + ax^2 + c = 0}$
$\mathbf{c + bx + ax^2 = 0}$
$\mathbf{c + ax^2 + bx = 0}$

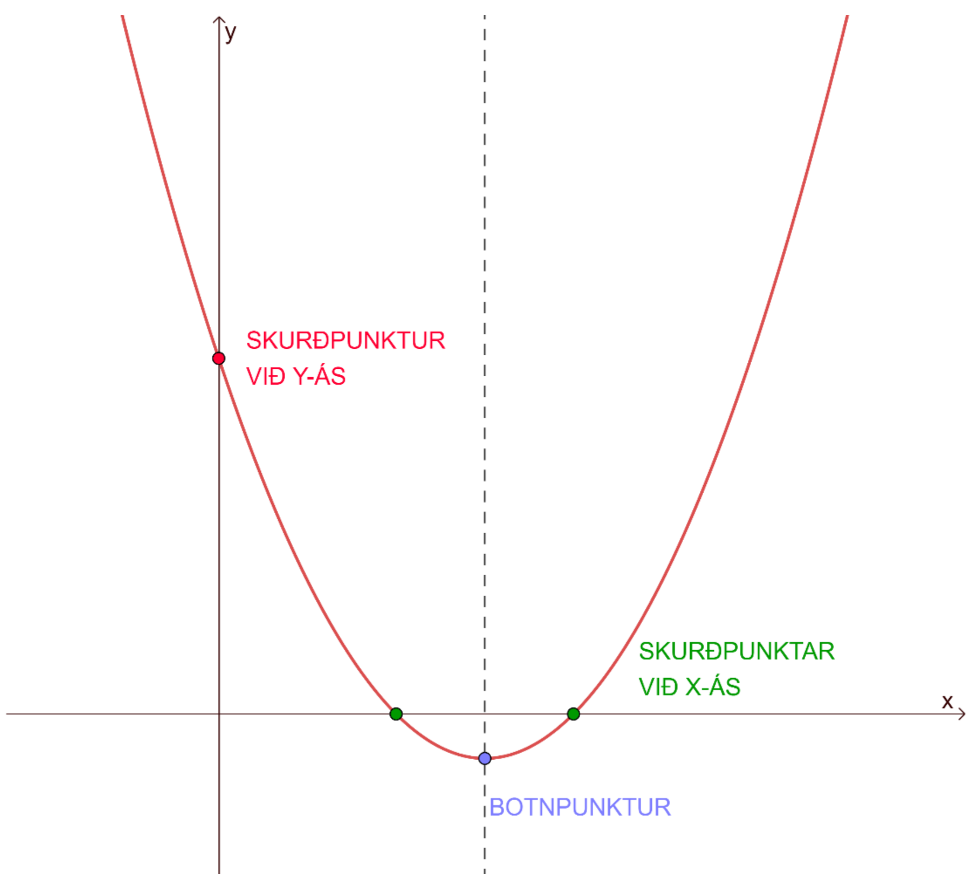
en $a = a$, $b = b$ og $c = c$. sama hver röðin er.

5.4.3 Lykilpunktagreining fleygbogans

Það eru fjórir punktar á fleygboganum sem eru mikilvægastir í lífi hans. Það eru:

1. **skurðpunktur hans við y - ásinn**
2. **skurðpunktar hans við x - ásinn**
3. **topppunktur/botnpunktur hans eða skurðpunktur hans við samhverfuásinn**

Mynd:



5.4.4 Skurðpunktur fleygbogans við y – ás

Fleyboginn hefur alltaf einn skurðpunkt við y - ásinn. Auðvelt er að finna hann. Hann er alltaf = c í jöfnunni $ax^2 + bx + \underline{c} = 0$. Segja má að skurðpunkturinn við y - ás sé alltaf (x,y) = (0,c), y - ásinn sker x - ásinn í (0,0).

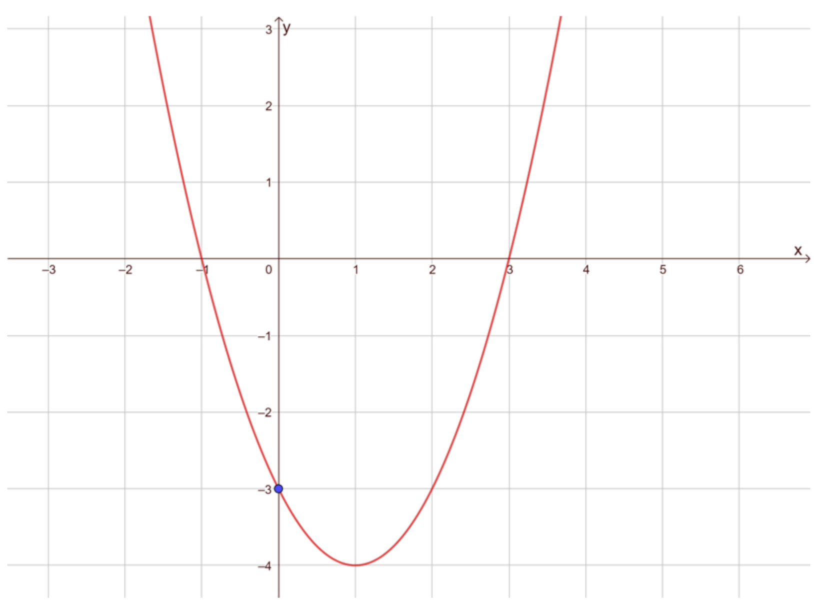
Skoðum nú gildistöflu fyrir jöfnuna:

x	$ax^2 + bx + c$	y	(x,y)
0	$a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$	c	(0,c)

Þegar þú setur x = 0 inn í jöfnuna ax2 + bx + c kemur út skurðpunktur fleygbogans við y - ásinn = (0,c).

Dæmi:

Finndu skurðpunkt fleygbogans $x^2 - 2x - 3 = 0$ við y - ásinn. c = -3. Þá er skurðpunkturinn við y - ásinn = (0,-3)



5.4.5 Samhverfuásinn/miðja fleygbogans

Miðja fleygbogans er kölluð samhverfuás eða spegilás hans. Á samhverfuásnum er botnpunktur/topppunktur fleygbogans. Samhverfuásinn á sérstaka formúlu sem reiknar út hvar hann sker x - ásinn. Jafna samhverfuássins er svona:

$x = \frac{-b}{2a}$ þar sem þú notar a og b úr $ax^2 + bx + c = 0$

Dæmi:

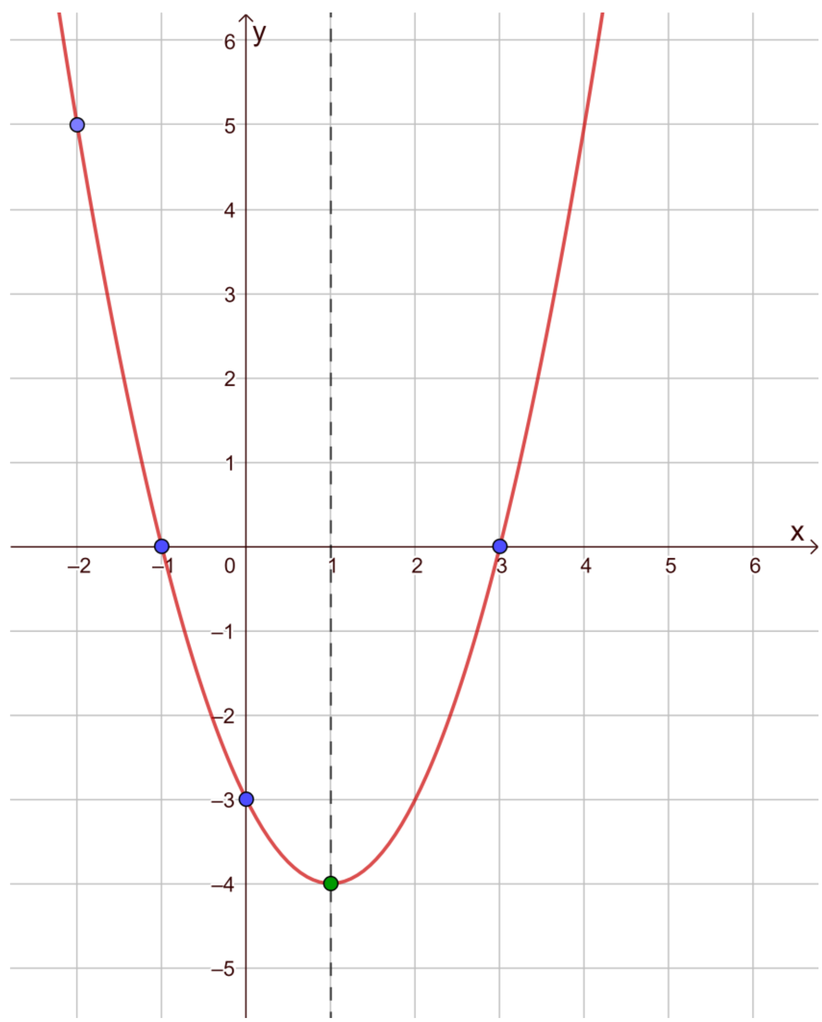
Finndu samhverfuás fleygbogans $y = x^2 - 2x - 3 = 0$. a = 1 og b = -2

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x = 1$$

Samhverfuásinn sker x ásinn í x = 1



5.4.6 Að finna topppunkt eða botnpunkt

Topppunktur / botnpunktur hefur hnitið (x,y) eins og allir punktar í hnitakerfinu.

1. x-hnitið finnur þú með jöfnu samhverfuásssins $x = \frac{-b}{2a}$

2. y-hnitið finnur þú með því að setja x-hnitið úr jöfnunni inn í gildistöflu fyrir $ax^2 + bx + c$

Dæmi:

Finndu botnpunkt fleygbogans $y = x^2 - 2x - 3$

1. x - hnit botnpunktsins finnur þú með: $x = \frac{-b}{2a}$

2. y - hnit botnpunktsins finnur þú með gildistöflu

a = 1 og b = -2

x - hnitið: $x = \frac{-b}{2a}$ og þá er $x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$. <u>x = 1</u>

y - hnitið: er fundið með gildistöflu fyrir jöfnuna

X	$y = x^2 - 2x - 3$	y	(x,y)
1	$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3$	-4	(1,-4)

Þá er botnpunkurinn = (1,-4). Sjá mynd í dæminu á undan

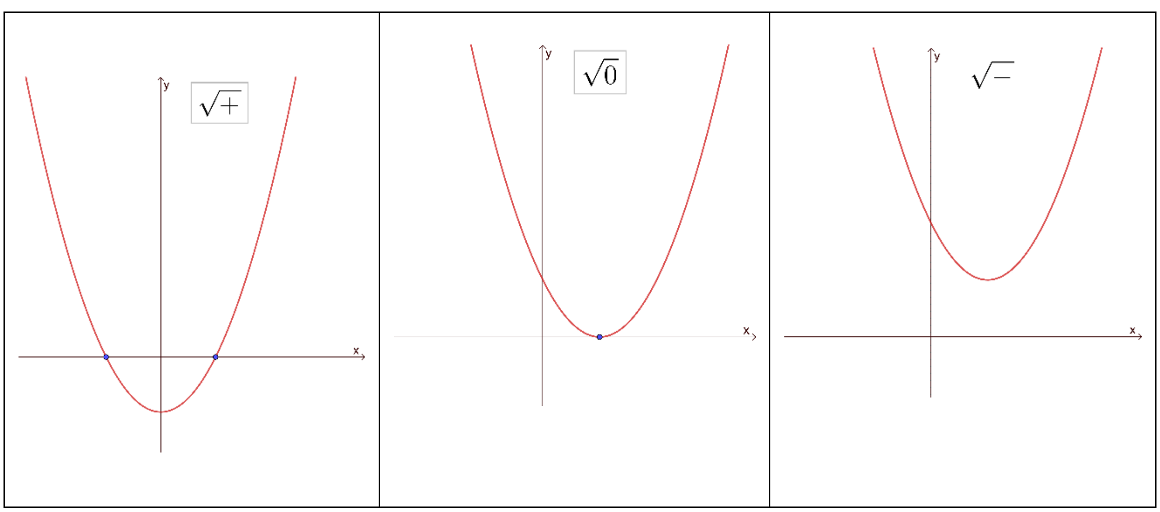
5.4.7 Skurðpunktar fleygbogans við x - ásinn

Segja má að mesta vinnan sé við að finna þessa lykilpunkta. Við notum annars stigs lausnarjöfnuna:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Við notum almenna jöfnuformið $ax^2 + bx + c = 0$ og setjum a, b og c inn á réttan stað í jöfnunni. Þessi formúla gengur undir ýmsum nöfnum: D - reglan, Jónas, Batman og fleira.

Ef útkoman undir kvaðratrótinni er + tala $\sqrt{+}$ þá hefur fleygboginn tvo skurðpunkta við x-ásinn. Ef talan undir kvaðrartrótinni verður 0 = $\sqrt{0}$ þá er bara einn skurðpunktur við x - ásinn. Ef talan undir kvaðratrótinn verður hins vegar mínustala $\sqrt{-}$ þá hefur fleygboginn engan skurðpunkt við x - ásinn. Þetta er allt mjög eðlilegt. Skoðum nú hvernig þetta lítur út á mynd:



Innsetningin inn í annarrar lausnar jöfnuna er einföld en hinsvegar geta orðið formerkjabreytingar á fjórum stöðum í formúlunni eða alls staðar og það er varasamt.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Í fyrsta dæminu hefur fleygboginn tvo skurðpunkta við x - ásinn.

Dæmi:

Finna skurðpunkta fleygbogans $y = x^2 - 2x - 8$ a = 1, b = -2 og c = -8 Innsetningin er þá svona inn í lausnarformúluna.

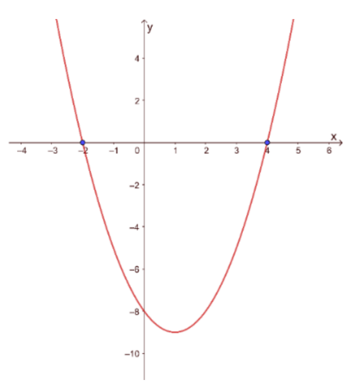
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ þá er $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$ þá er $x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$ þá er $x = \frac{2 \pm 6}{2}$

$x = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$ og $x = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x = \underline{4}$ og $x = \underline{-2}$

Séu lausnirnar teiknaðar inn í hnitakerfið lítur fleygboginn svona út:



Lítum næst á dæmi þar sem fleygboginn hefur aðeins einn skurðpunkt við x - ásinn.

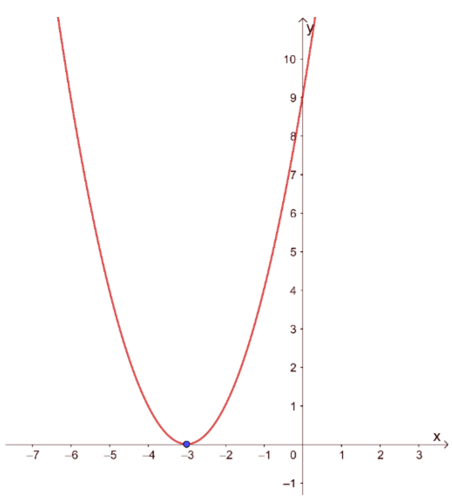
Dæmi:

Finndu skurðpunkta fleygbogans $y = x^2 + 6x + 9$. $a = 1$, $b = 6$ og $c = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{þá er} \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} \quad \text{þá er} \quad x = \frac{6 \pm 0}{2} \quad \text{þá er} \quad x_1 = \underline{-3} \text{ og } x_2 = \underline{-3}$$

Þegar það kemur 0 undir kvaðratrótina í annars stigs lausnarjöfnunni þá er aðeins einn skurðpunktur fleygbogans við x - ásinn. Sjá mynd:



Lítum því næst á dæmi um fleygboga sem hefur engan skurðpunkt við x – ásinn, sem er líka fullkomlega eðlilegt.

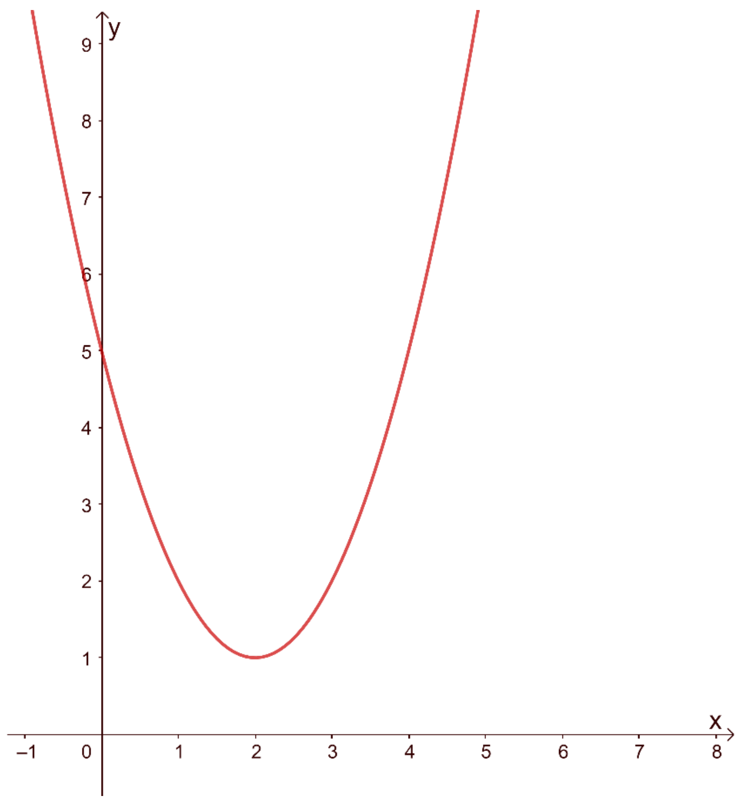
Dæmi:

Finndu skurðpunkta fleygbogans y= x^2 -4x +5 **a = 1, b = -4 og c = 5.**

x = $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **þá er** x = $\frac{-(-4) \pm \sqrt{-4^2-4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$

x = $\frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$ **Þá er** x = $\frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ **Ath** $\sqrt{-4}$ **= Error.**

Þessi fleygbogi hefur engan skurðpunkt við x - ásinn þvi það kemur (-) tala undir kvaðratrótinni.



5.4.8 Lokaorð um fleygbogann

Segja má að fleygboginn sé hugtaka- og reglukerfi sem segir okkur eftirfarandi:

Hvernig hann snýr
Hvar er miðja hans = samhverfuásinn
Hver er botn / topppunktur hans
Hverjir eru skurðpunktar hans við ása hnitakerfisins

Tveir skurðpunktar. $\sqrt{+}$	**Einn skurðpunktur.** $\sqrt{0}$	**Enginn skurðpunktur.** $\sqrt{-}$

Fleygboginn hefur alltaf einn skurðpunkt við y - ásinn, botn/topppunkt og tvo, einn eða engan skurðpunkt við x - ásinn. Það er von mín að lestur þessa kafla hafi kynnt þig fyrir hinum töfrandi heimi fleygbogans.

5.5 Nokkur lykilhugtök hnitakerfisins

Áður en lengra er haldið er rétt að skoða nokkur greiningarhugtök hnitakerfisins, hugtök sem segja okkur um tengsl x - hnita við y - hnit og um bil sem ferillinn notar á x - ás og y - ás.

5.5.1 Biltákn

Það er hægt að tákna bil á nokkra vegu:

Með orðum

Með talnalínu

Með biltáknum

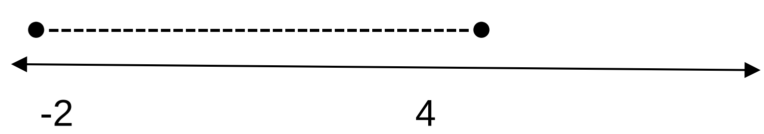
Með ójöfnutáknum

Einnig geta bil verið opin eða lokuð. Lokað bil hefur upphafspunkt og endapunkt.

Dæmi:

Skráðu allar tölur frá og með -2 til og með 4 á talnalínu, með biltáknum og ójöfnutáknum

Talnalína:



Biltákn: [-2, 4] Hornklofinn lokast inn

Ójöfnutákn: $-2 \leq x \leq 4$

Opið bil er ögn heimspekilegri pæling því að opið bil hefur <u>ekki</u> upphafspunkt og <u>ekki</u> endapunkt. Það er því ef til vill skrítið að hugsa sér bil sem byrjar hvergi og endar hvergi.

Dæmi:

Skráðu allar tölur frá -2 og til 4 á tanalínu, með biltáknum og ójöfnutáknum

Talnalína: o---------------------------------o

-2 4

-Biltákn:] -2,4 [Hornklofinn opnast út.

-Ójöfnutákn: $-2 < x < 4$

Biltákn samantekt:

Lokað.		Opið.
• •	Talnalína.	o o
[ ]	Biltákn.	] [
$\leq$ $\leq$	Ójöfnutakn.	$<$ $<$

Dæmi:

Skráðu allar tölur frá og með -2 til 4 á talnalínu, með biltáknum og ójöfnutáknum

Talnalína: •-------------------------------------o

-2 4

-Biltákn: [-2,4 [Lokað í -2 og opið í 4.

-Ójöfnutákn: $-2 \leq x < 4$

Ef bil er óendanlegt í + eða – áttina þá lokast það ekki. Það má því segja að óendanleikinn sé því opið bil. Það má tákna á tvo vegu: $]-\infty,+\infty[$ eða $]\leftarrow,\rightarrow[$

Dæmi:

Skráðu bilið frá og með -2 til +óendanlegt með á talnalínu, með biltáknum og ójöfnutáknum

Talnalína: ●--

$\longleftrightarrow$

-2

-Biltákn: $[-2,\rightarrow[$ **eða** $[2,\infty[$

-Ójöfnutákn: $x \geq -2$

5.5.2 Fall

Talað er um fallið af x eða f(x). Þá er átt við tengslin sem eru á milli x - hnitanna og y-hnitanna í hnitakerfinu, hvernig hvert og eitt x-hnit tengist sérhverju y-hniti = (x,y). Þetta sést mjög vel í gildistöflunni sem er fjórir dálkar, einn fyrir x, einn fyrir f(x) = jafnan, einn fyrir y og svo er dálkur fyrir punktana (x,y).

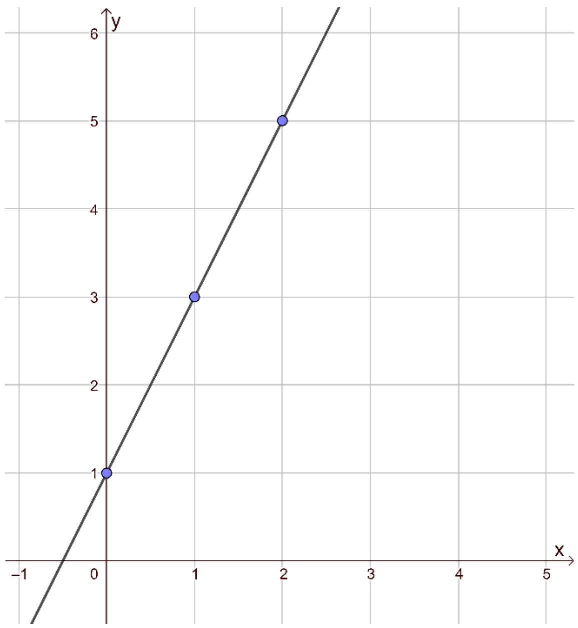
Dæmi:

Settu fallið = jöfnuna f(x)= 2x +1 inn í gildistöflu og teiknaðu ferilnn inn í hnitakerfi.

x	f(x) = 2x +1	y	(x,y)
0	f(0) = 2·0 + 1	1	(0,1)
1	f(1) = 2·1 + 1	3	(1,3)
2	f(2) = 2·2 + 1	5	(2,5)
x	x fer inn í jöfnuna og út kemur y.	y	(x,y)

Framhald:

Þannig parast saman x - in og y - in og til verða punktarnir: (0,1), (1,3) og (2,5). Hægt væri að finna fleiri punkta



Það sem kemur út úr f (x) dálknum er = y. Þannig má segja að: f(x)=y oh má skrifa jöfnuna bæði sem:

f(x) = 2x +1 eða y = 2x +1

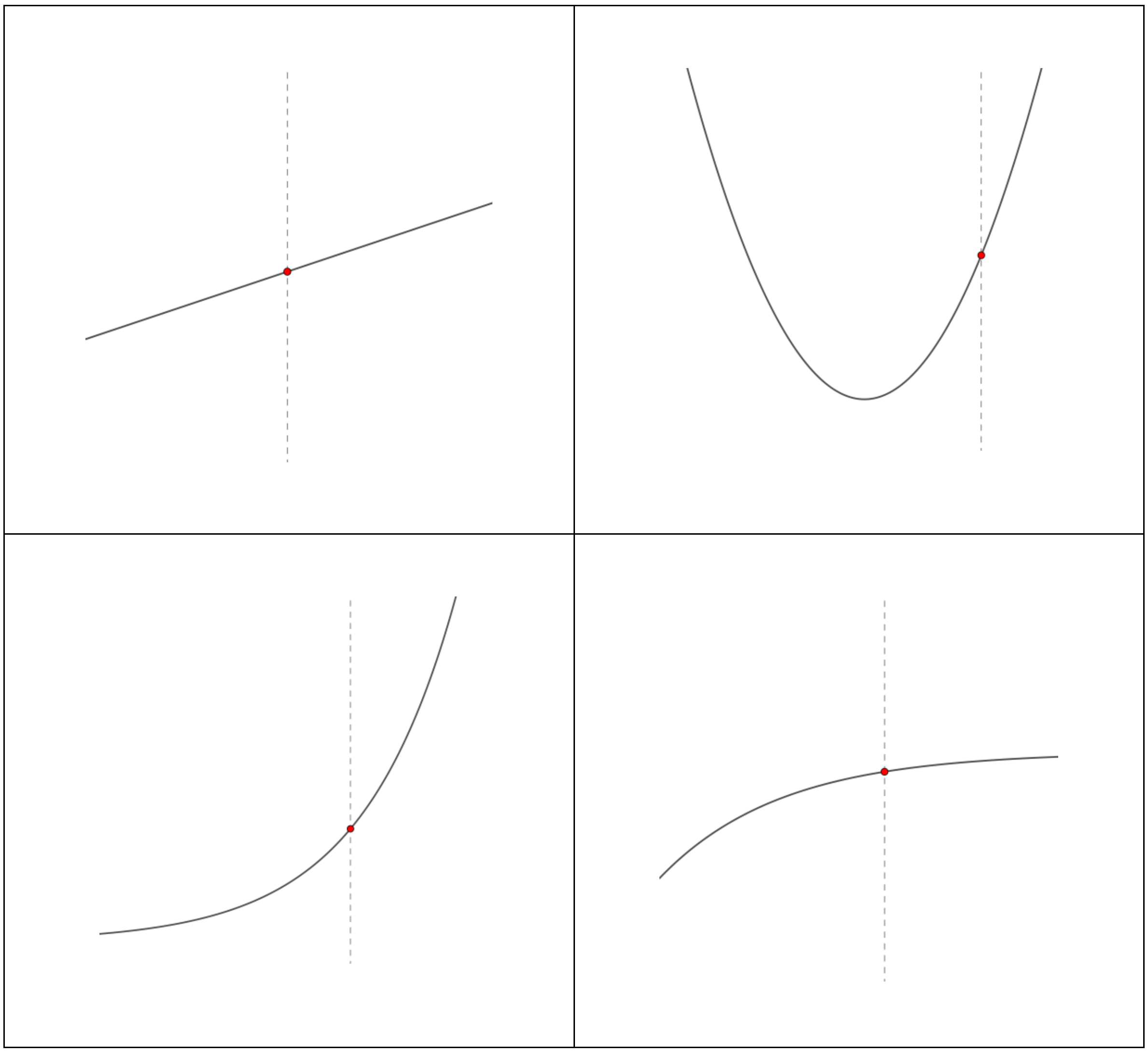
Fall er tengsl á milli x - áss og y - áss, þar sem aðeins eitt x - hnit parast við eitt y - hnit.

5.5.3 Lóðrétta prófið

Hægt er að prófa hvort ferillinn er fall með því að draga lóðrétta línu í gegnum ferilinn og ef aðeins verður til einn skurðpunktur þá er ferillinn fall.

Dæmi:

Hverjir eftirfarandi ferla eru fall?

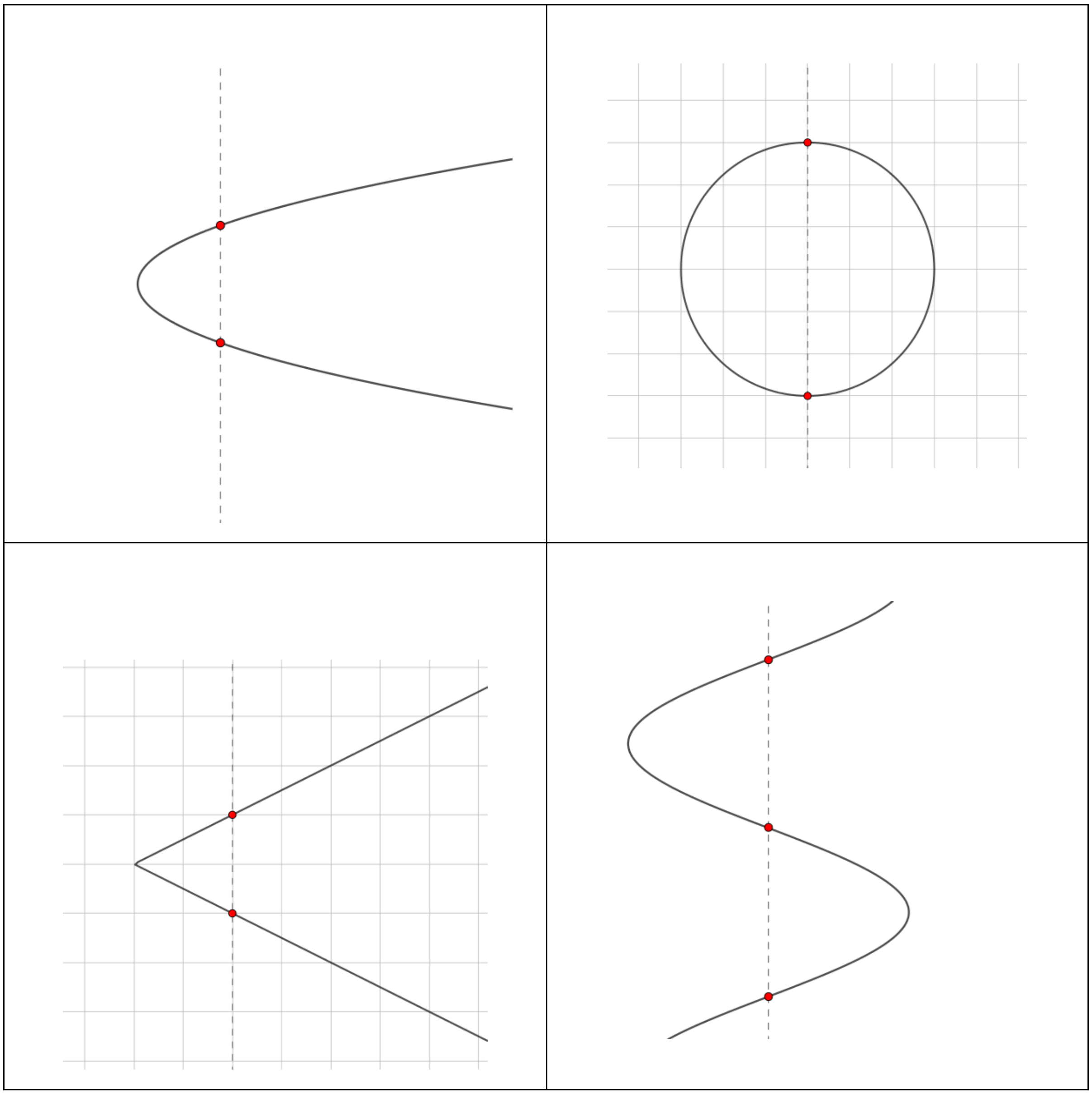


Þessir ferlar eru allir fall.

Skoðum til samanburðar ferla sem eru ekki fall af x og skoðum hvernig þeir koma út á lóðrétta prófinu. Þá myndast fleiri en einn skurðpunktur á milli lóðréttu línunnar og ferilsins.

Dæmi:

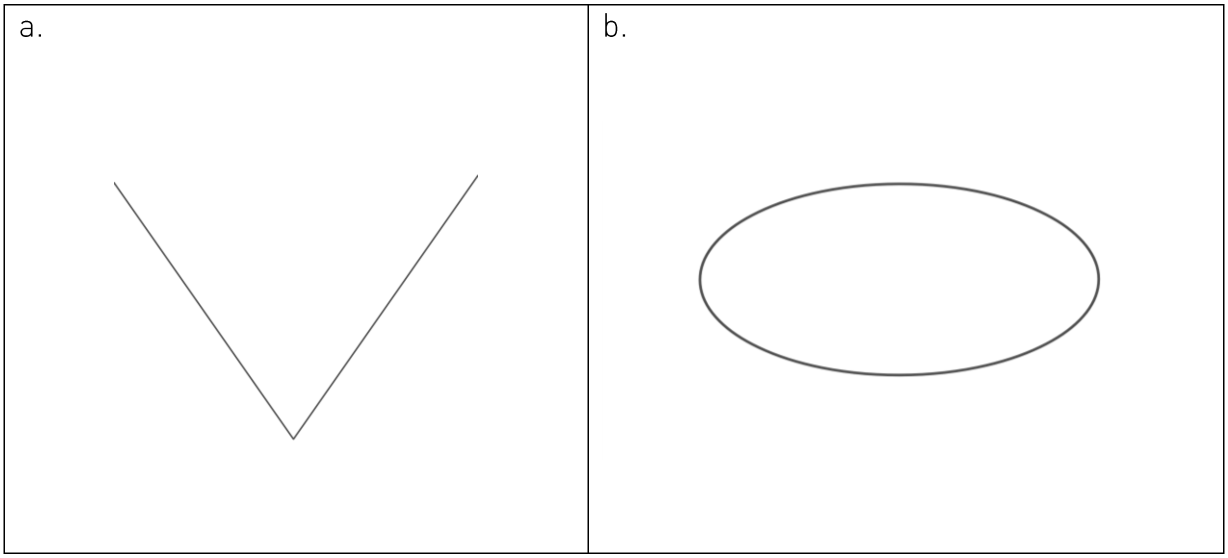
Hverjir eftirfarandi ferla eru ekki fall?



Enginn þessara ferla er fall. Lóðrétta prófið býr til tvo eða fleiri skurðpunkta við ferilinn

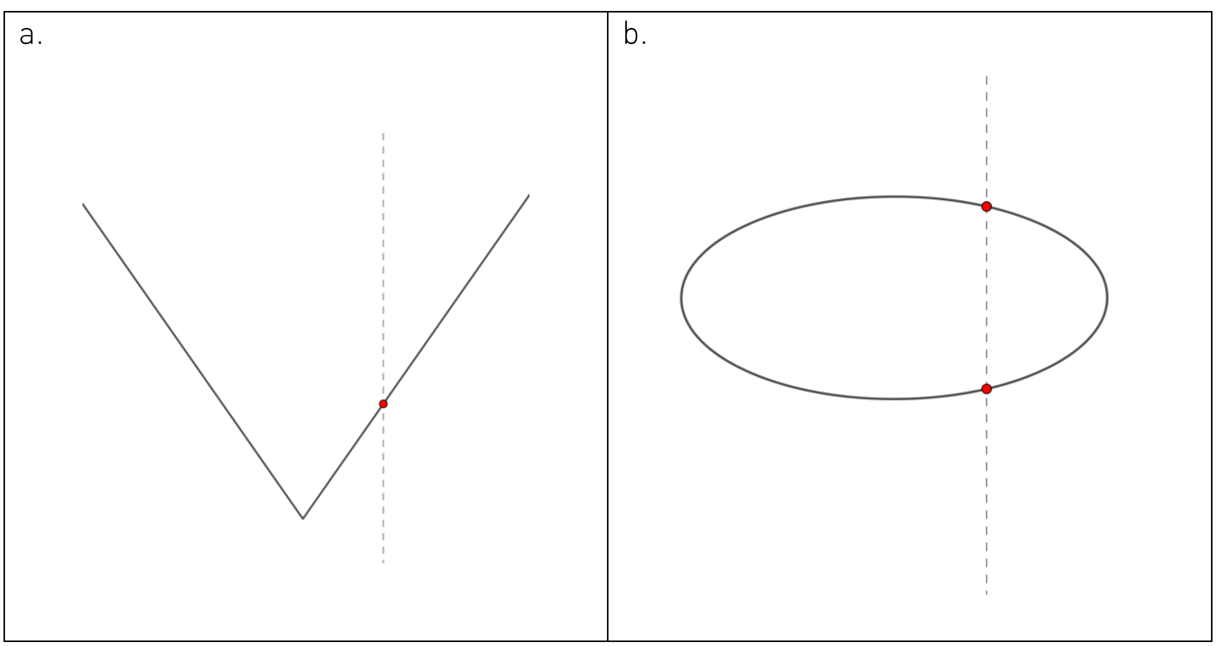
Dæmi:

Eru þessir ferlar fall?



a er fall = einn skurðpunktur við lóðrétta ferilinn

b er ekki fall = tveir skurðpunktar við lóðrétta ferilinn

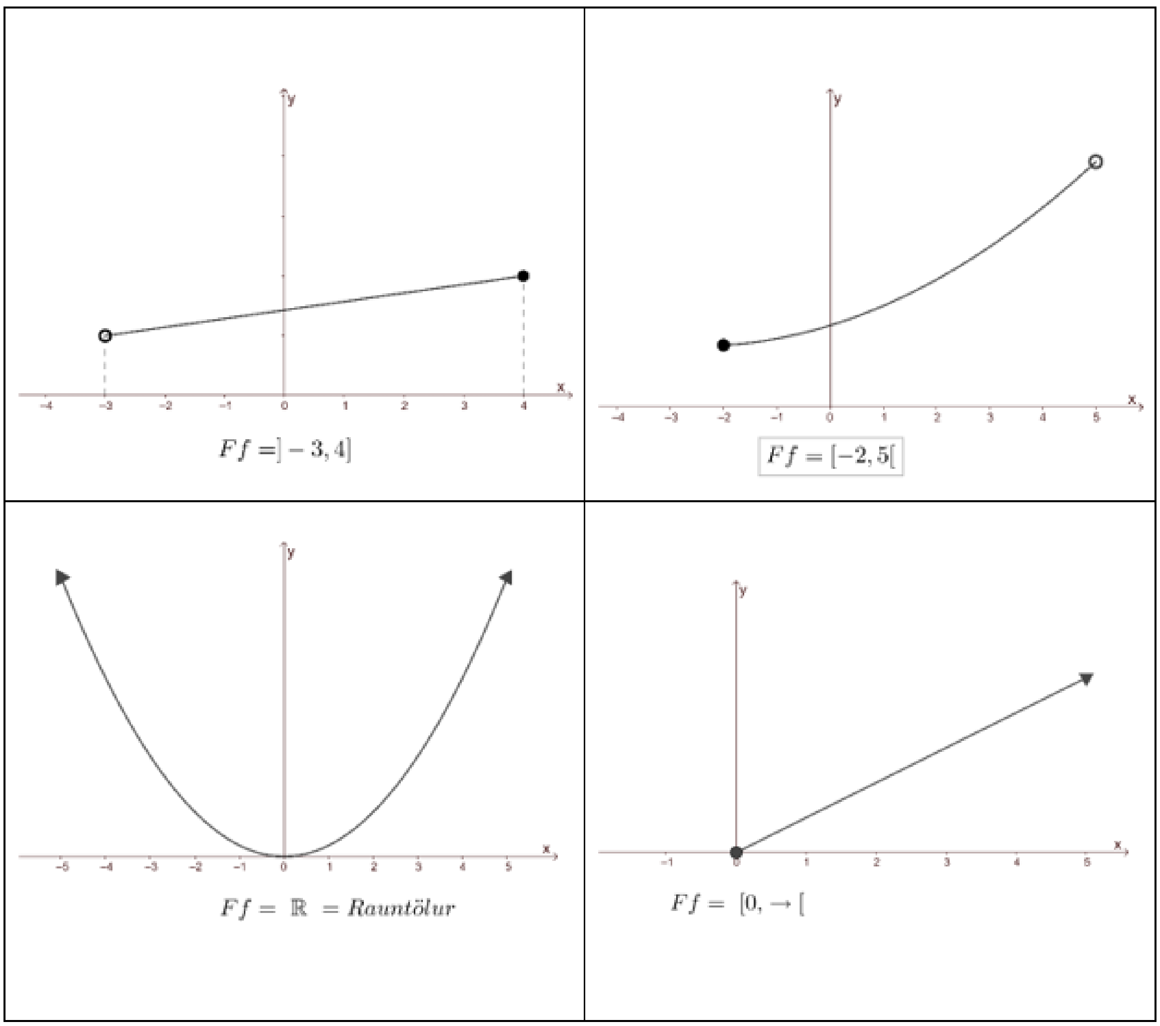


5.5.4 Formengi

Formengi fallsins Ff spyr spurningarinnar: Hvað notar ferillinn mikið af x ásnum? Gæti eins heitið x - ás mengi. Stundum notar ferillinn allan x - ásinn og stundum aðeins hluta hans, það er þá táknað með biltáknum. Best er að skilja hugtakið fomengi út frá mynd.

Mynd:

Tilgreindu formengi fallanna.

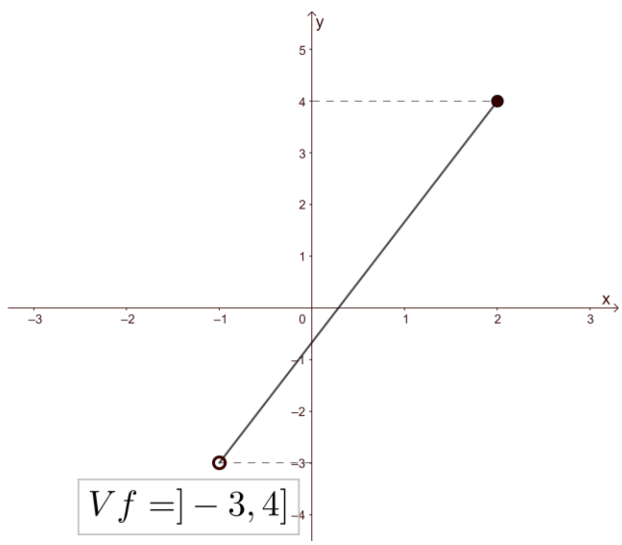


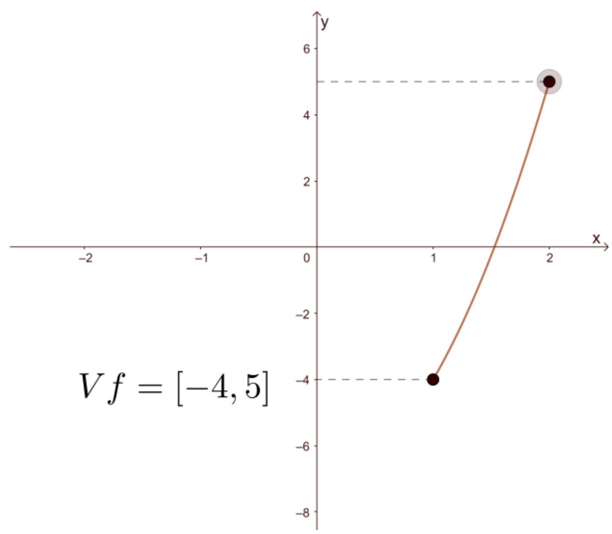
5.5.5 Varpmengi

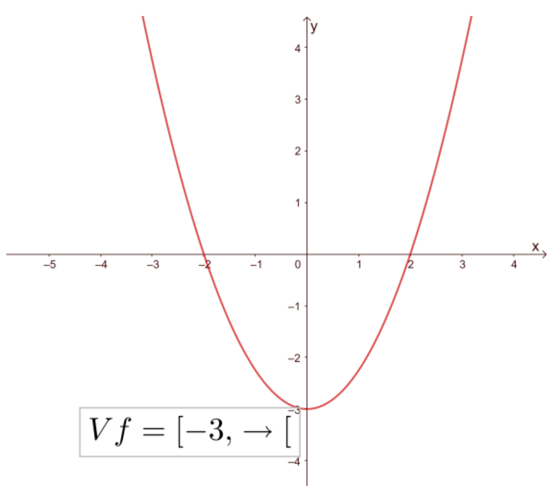
Varpmengi spyr spurningarinnar: Hvað notar ferillinn mikið af y - ásnum? Hann ætti í raun að heita y- ásmengi. Stundum notar ferillinn allan y - ásinn og stundum aðeins hluta hans. Það er þá táknað með biltáknum.

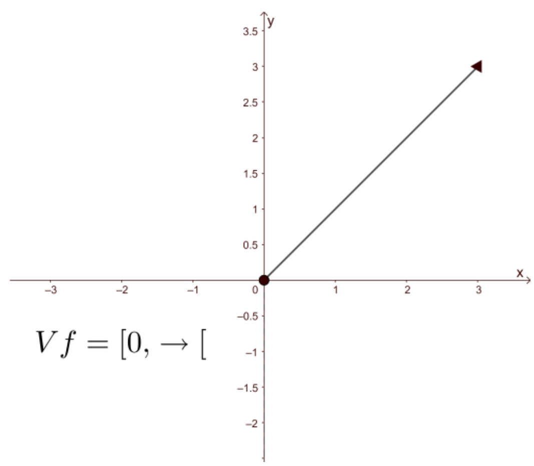
Mynd:

Tilgreindu varpmengi fallanna:



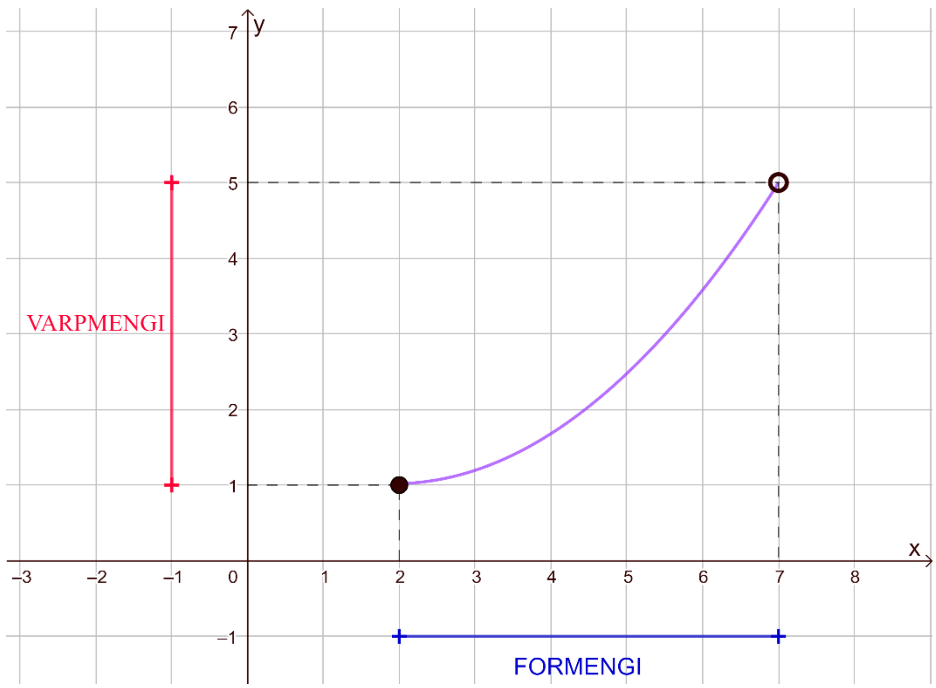






Dæmi:

Finndu formengi Ff og varpmengi Vf ferilsins á myndinni.



Formengi fallsins x - ásinn. Ff = [2,7 [

Varpmengi fallsins y - ásinn Vf = [1,5 [

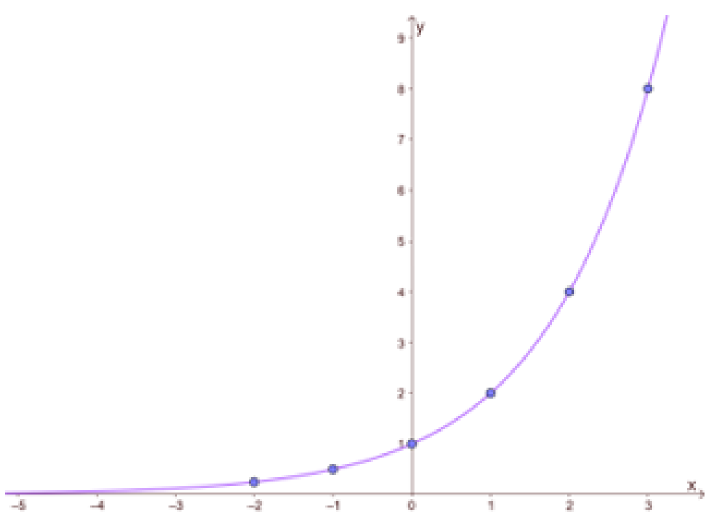
5.6 Veldisfall

Veldisfall gæti vel heitið veldisvísisfall, segja má að x fari þá í velda stöðu. Jöfnurnar líta þá út svona: **$y = 2^x$ eða $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$** . Þá verður til fall eða ferill, sem hefur sérstöðu og raðar sér öðruvísi inn í hnitakerfið en bein lína og fleygboginn.

Dæmi:

Teiknaðu feril fallsins $y = 2^x$ inn í hnitakerfið.

x	$y = 2^x$	y	(x,y)
-2	$y = 2^{-2}$	1/4	(-2, 1/4)
-1	$y = 2^{-1}$	1/2	(-1, 1/2)
0	$y= 2^0$	1	(0,1)
1	$y = 2^1$	2	(1,2)
2	$y = 2^2$	4	(2,4)
3	$y = 2^3$	8	(3,8)



FERILLINN ER SÍVAXANDI

Segja má að föllin 2^x og $(1/2)^x$ séu spegilmyndir hvors annars um y - ásinn.

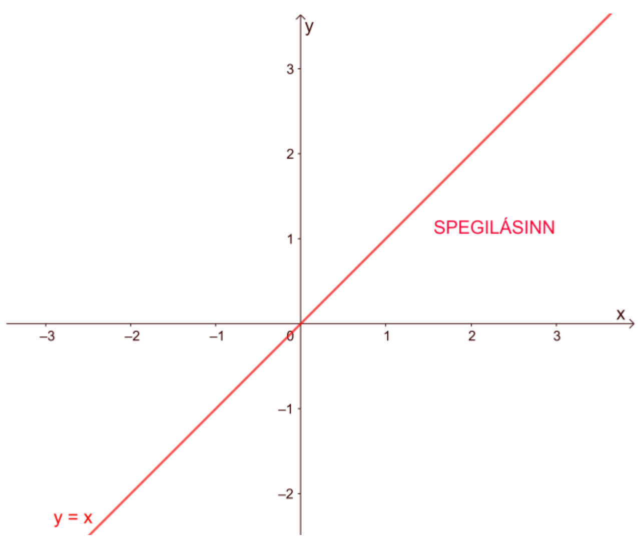
5.7 Andhverfa fallið

Andhverfa fallið er eins og nafnið bendr til öfugt fall þar sem x verður y og y verður x og þá speglast fallið og andhverfa fallið um spegilásinn: y = x

Spegilásinn: Fallið og andhvera fallið speglast um línuna: y = x.

Dæmi:

x	y = x	y	(x,y)
0	y = 0	0	(0,0)
1	y = 1	1	(1,1)
2	y = 2	2	(2,2)
3	y = 3	3	(3,3)
4	y = 4	4	(4,4)

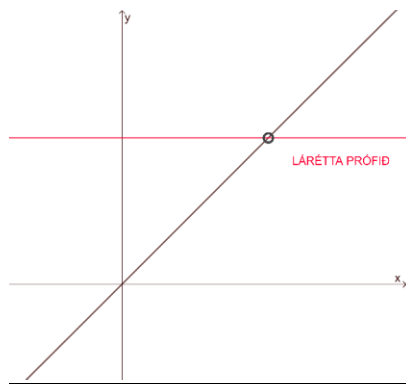


5.7.1 Lárétta prófið

Það eiga ekki öll föll andhverfufall, aðeins þau sem hægt er að spegla um línuna y = x. Ef horft er á ferilinn í hnitakerfi er auðvelt að sjá hvort ferillinn hefur andhverfufall eða ekki. Það er gert með lárétta prófinu. Ef lárétt lína hefur aðeins einn skurðpunkt við ferilinn þá hefur fallið andhverfufall.

Dæmi:

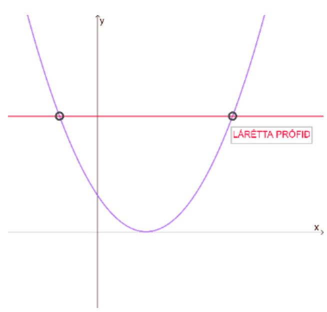
Hefur þessi ferill andhverfufall?



Þessi ferill hefur andhverfufall.

Dæmi:

Hefur þessi ferill andhverfu fall?



Þess ferill hefur ekki samhverfuás.

Dæmi:

Finndu andhverfufall fyrir $y = 2x + 2$ og teiknaðu í hnitakerfið.

$y = 2x + 2$ Einangra x

$y - 2 = 2x$

$2x = y - 2$

$x = 0{,}5y - 1$

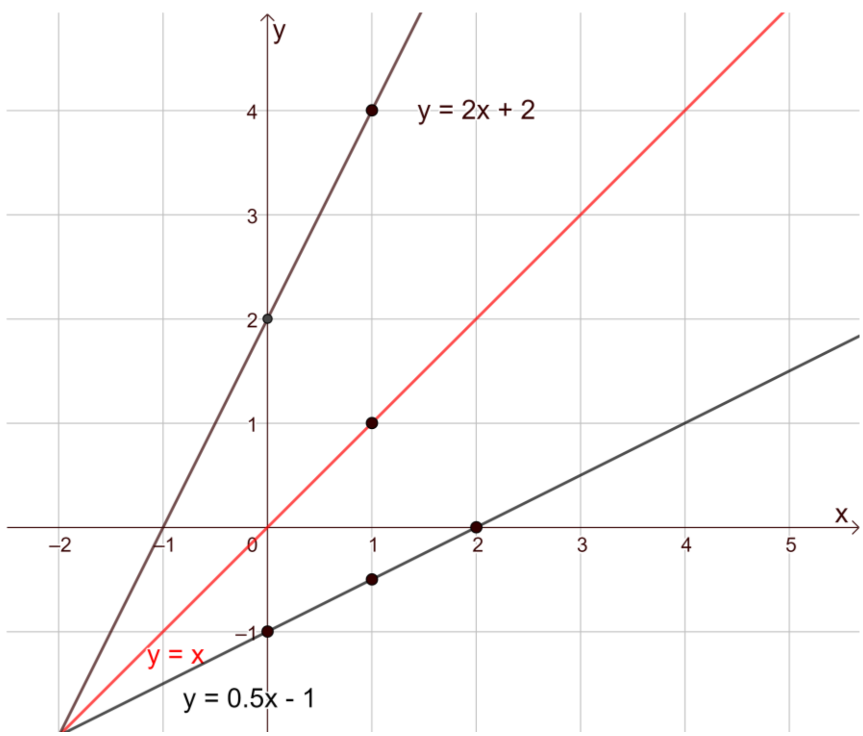
Skipta á x og y.

$y = 0{,}5x - 1$

x	y = 2x +2	y	(x,y)
0	$y = 2 \cdot 0 + 2$	2	(0,2)
1	$y = 2 \cdot 1 + 2$	4	(1,4)
2	$y = 2 \cdot 2 + 2$	6	(2,6)

X	y = 0,5x -1	y	(x,y)
0	$y = 0{,}5 \cdot 0 - 1$	-1	(0,-1)
1	$y = 0{,}5 \cdot 1 - 1$	-0,5	(1,-0,5)
2	$y = 0{,}5 \cdot 2 - 1$	0	(2,0)

Línurnar $y = 2x + 2$ og $y = 0{,}5x - 1$ speglast um línuna $y = x$ og eru því andhverf föll. Sjá mynd:



5.8 Jafnstætt og oddstætt fall

Fall er jafnstætt ef það speglast um y - ásinn.

Dæmi:

Gott dæmi um jafnstætt fall er

f(x) = x2

Það sést vel í gildistöflunni að

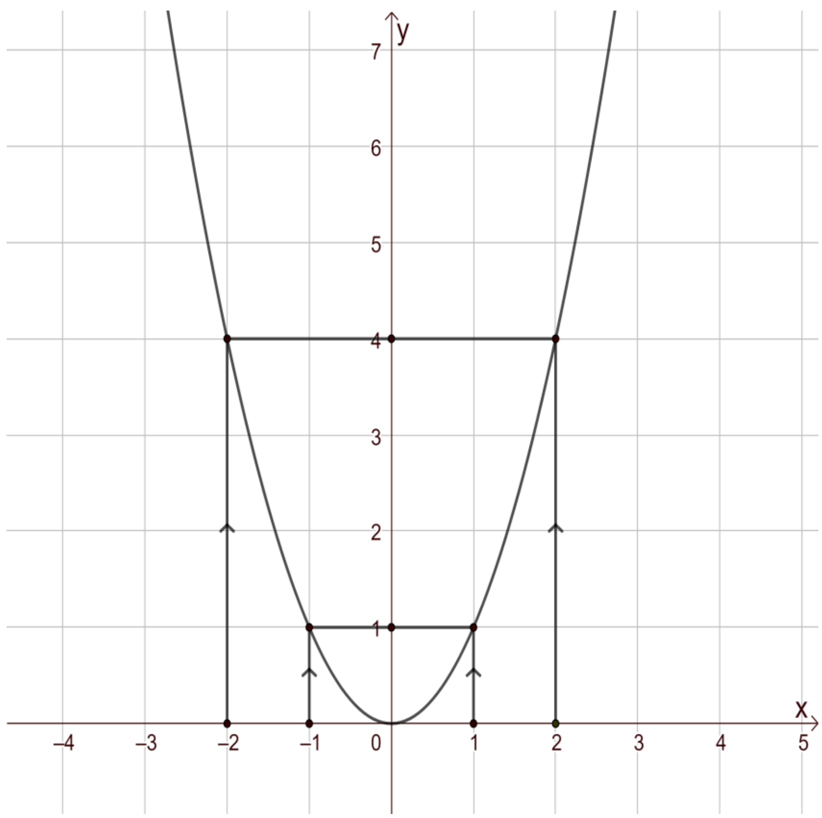
x	y = x^2	y
-2	y = $(-2)^2$	4
-1	y = $(-1)^2$	1
0	y = 0^2	0
1	y = 1^2	1
2	y = 2^2	4

fallið er jafnstætt.

f(1) og f(-1) =1

f(2) og f(-2) = 4

Einnig sést mjög vel í hnitakerfinu að ferillinn f(x) = x2 speglast um y - ásinn.



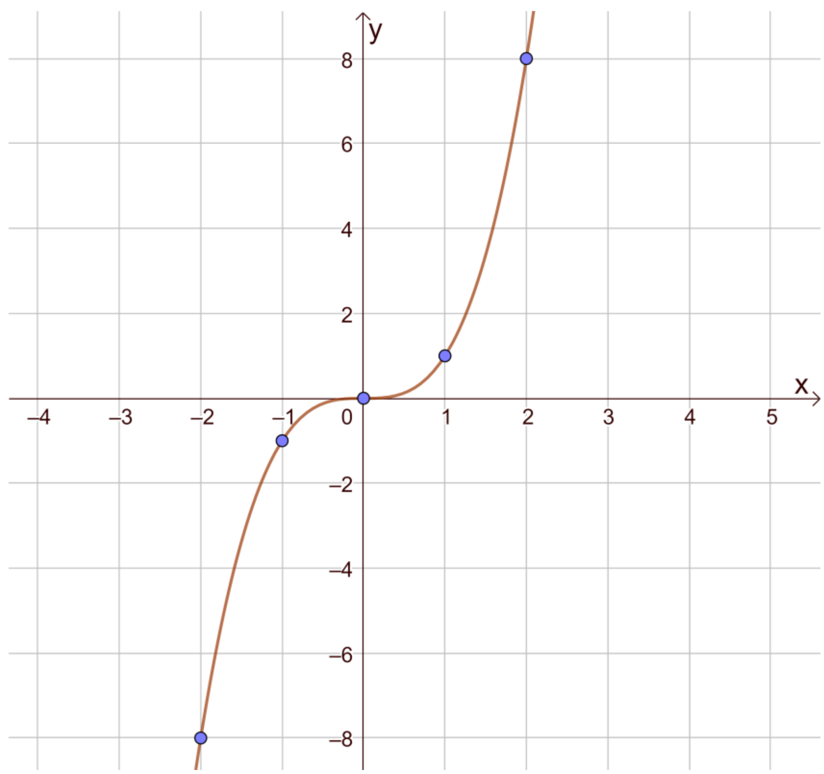
Fall er kallað oddstætt ef þú snýrð myndinn á hvolf = um 180° og ferillinn (fallið) breytist ekki við það að standa á haus.

Dæmi:

Gott dæmi um oddstætt fall er f(x) = x^3

Einnig sést mjög vel í hnitakerfinu ef fallið er oddstætt og breytist ekki við það að standa á haus.

x	$y = x^3$	y
-2	$y = (-2)^3$	-8
-1	$y = (-1)^3$	-1
0	$y = 0^3$	0
1	$y = 1^3$	1
2	$y = 2^3$	8



Sumir ferlar eru hvorki oddstæðir né jafnstæðir, það er: speglast ekki um y - ásinn.

Dæmi:

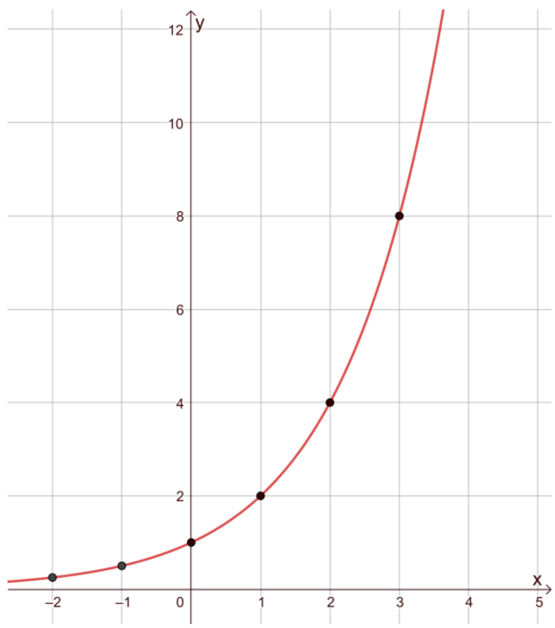
Veldisfallið $f(x) = 2^x$ er ekki jafnstætt og ekki oddstætt

Það sést mjög vel bæði

í gildistöflunni og í

hnitakerfinu.

x	$y = 2^x$	y
-2	$y = 2^{-2}$	0,25
-1	$y = 2^{-1}$	0,5
0	$y = 2^0$	1
1	$y = 2^1$	2
2	$y = 2^2$	3
3	$y = 2^3$	4



5.9 Dulbúnar annars stigs jöfnur

Eins og fram kemur hér að framan þá er hægt að leysa annars stigs jöfnur: $ax^2 + bx + c = 0$ með annars stigs lausnar formúlunni.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Þessi jafna er aðeins nothæf til þess að leysa annars stigs jöfnur og þær jöfnur sem hægt er að umrita sem annars stigs jöfnur: $ax^2 + bx + c = 0$.

Skoðum fyrst 4.stigs jöfnu sem í raun ætti ekki að vera hægt að leysa með 2.stigs lausnar jöfnunni. Sjá dæmi þar um á næstu síðu

Dæmi:

Leystu jöfnuna: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Byrjum á að umrita hana sem 2. stigs jöfnu þar sem:

$x^2 = u$

Þá verður til 2. stigs hermi - jafnan: $u^2 - 7u + 12 = 0$ sem er leysanleg með 2. stigs lausnar jöfnunni. $a = 1$, $b = -7$ og $c = 12$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{þá er} \quad x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{7 \pm \pm\sqrt{49 - 48}}{2} \quad \text{þá er:} \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \text{þá er:} \quad x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = \underline{4} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = \underline{3}$$

Þessar lausnir leysa 2. stigs jöfnuna: $u^2 - 7u + 12 = 0$

Nú þarf að prófa hvort þær leysi 4. stigs jöfnuna þar sem $x^2 = u$.

$x^2 = u = 4$ og $x^2 = u = 3$

$x^2 = 4$ og $x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{4}$ og $x = \pm\sqrt{3}$

$x = \underline{2}$ og $\underline{-2}$ og $x = \underline{\sqrt{3}}$ og $\underline{-\sqrt{3}}$

Þannig verða til 4 lausnir fyrir fjórða stigs jöfnuna: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

5.9.1 Rótarjöfnur

Til er önnur tegund af dulbúnum 2. stigs jöfnum, það er rótarjöfnur. Það eru jöfnur sem innihalda kvaðratrót. Ekki er hægt að leysa slíkar jöfnur í talnakerfinu nema eyða rótinni fyrst sem er auðvelt því ef þú setur rót í annað veldi þá eyðist rótin og þá er hægt að leysa jöfnuna.

$$\boxed{(\sqrt{x})^2 = x}$$

Þannig má segja að rót og veldi séu andhverfur.

Dæmi:

$\sqrt{10-x} = x - 4$ **Fyrst er að setja báðar hliðar í annað veldi**

$(\sqrt{10-x})^2 = (x-4)^2$ **Einfalda**

$10 - x = (x-4)(x-4)$ **Margfalda saman svigana**

$10 - x = x^2 - 4x - 4x + 16$ **Einfalda**

$10 - x = x^2 - 8x + 16$ **Núlla jöfnuna**

$x^2 - 8x + x + 16 - 10 = 0$ **Einfalda**

$x^2 - 7x + 6 = 0$ **Þetta er leysanleg jafna**

Þetta er annarsstigs jafna, sem er hermi - jafna fyrir rótarjöfnuna og hefur sömu lausnir og hún séu þær til

Jafnan leysist með annars stigs lausnar jöfnunni

$x^2 - 7x + 6 = 0$ **þá er :** $a = 1$, $b = -7$ **og** $c = 6$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **þá er:** $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$ →

Framhald:

x = $\frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2}$ þá er: x = $\frac{7 \pm \sqrt{25}}{2}$ þá er x = $\frac{7 \pm 5}{2}$

x = $\frac{7+5}{2}$ = $\frac{12}{2}$ = $\underline{6}$ og x = $\frac{7-5}{2}$ = $\frac{2}{2}$ = $\underline{1}$

Prófa lausnirnar í rótarjöfnunnin með innsetningu

x = 6 og x = 1

$\sqrt{10-x}$ = x - 4 og $\sqrt{10-x}$ = x - 4

$\sqrt{10-6}$ = 6 - 4 og $\sqrt{10-1}$ = 1 - 4

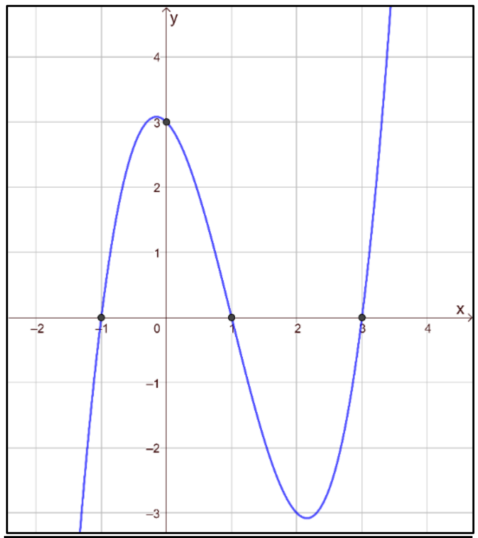
$\sqrt{4}$ = 2 og $\sqrt{9}$ = -3

2 = 2 Rétt. og 3 = -3 Ekki rétt.

Þannig að þessi rótarjafna hefur aðeins lausnina x = 6

5.10 Margliðudeiling

Skoðum nú feril í hnitakerfinu sem lítur svona út:



Ferillinn sker x - ásinn á þremur stöðum: x = -1,   x = 1 og x = 3. Ef lausnirnar eru settar inn í þáttareglu = búa til sviga, lítur þetta svona út:

x = -1 **x +1 =0** **(x + 1)**	**x = 1** **x -1 = 0** **(x -1)**	**x = 3** **x -3 = 0** **(x - 3)**

Séu svigarnir margfaldaðir saman kemur út jafna ferilsins:

$(x+1)(x-1)(x-3) = 0$ Margfalda fyrst saman fyrstu tvo svigana

$(x^2 - x + x - 1)(x - 3) = 0$ Einfalda

$(x^2 - 1)(x - 3) = 0$ Margfalda svo saman svigana

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ Margfaldir þú saman alla þrjá svigana færð þú út þriðja stigs margliðuna: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ sem þýðir líka að margliðan er deilanleg með svigunum öllum þremur og þær deilingar munu ganga upp. Sjá sýnidæmi hér á eftir. Það sem er viðkvæmast í margliðudeilingunni er að þú þarft að skipta um formerki á öllum liðum til þess að klára deilinguna.

Dæmi:

Deildu: 5 / 2

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 5 \\ & \pm 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Svarið verður 2 og 1 / 2

Skoðaðu vel formerkjabreytinguna ± 4

Sem þarf að framkvæma til þess að klára deilinguna

Skoðum nú dæmi um margliðudeilingu með margliðunni sem við bjuggum til áðan úr svigunum: (x +1) (x -1) og (x -3).

Dæmi: Deildu:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 4x + 3 \\ \hline x + 1 & x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ & +(-)x^3 -(+)x^2 \\ \hline & -4x^2 - x \\ & -(+)4x^2 -(+)4x \\ \hline & 3x + 3 \\ & +(-)3x +(-)3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Þetta gerist þrisvar sinnum og alltaf þarf að skipta um formerki og á endanum kemur út 0 sem þýðir að deilingin gekk upp.

Dæmi:

$x^2 - 1$

$x - 3 \quad | \quad x^3 - 3x^2 - x + 3$

$+(-)\, x^3 - (+)3x^2$

$-x + 3$

$-(+)x + (-)3$

0

Dæmi:

$x^2 - 5x + 9$

$x + 2 \quad | \quad x^3 - 3x^2 - x + 3$

$+(-)\, x^3 + (-)2x^2$

$-5x^2 - x$

$-(+)5x^2 - (+)10x$

$9x + 3$

$+(-)9x + (-)18$

-15

Þessi deiling gengur ekki upp. Þá er (x + 2) ekki þáttur í

$x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Mjög gott er að æfa sig mjög vel á margliðudeilingunni. Sérstaklega þarf að skoða vel formerkjabreytingarnar.

5.10.1 Stuðladeiling

Einnig er hægt að deila margliðu deilingu á annan hátt með stuðladeilingu. Þá er deilt með lausnunum í stuðlana. Í jöfnunni $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ hér að framan eru lausnirnar = skurðpunktarnir við x - ásinn $x = -1$, $x = 1$ og $x = 3$ og þá gengur deilingin upp.

Deilingin: $x + 1 \overline{\big)\, x^3 - 3x^2 - x + 3}$

mundi líta svona út í stuðladeilingu þar sem aðeins stuðlarnir í jöfnunni eru notaðir til þess að deila.

Dæmi:

Deildu með (x + 1) í $x^3 - 3x^2 - x + 3$ Sjá sýnidæmið hér undan

$x + 1 = 0$ Stuðlarnir eru: 1, -3, -1, 3

$x = -1$

Deilingin verður þá svona:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\
 & \downarrow & -1 & 4 & -3 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & \underline{0}
\end{array}
$$

a. 1 Fer beint niður

b. -1 margfaldast með 1

c. Leggja saman -3 -1

d. Endurtaka

Þá er svarið: $\underline{x^2 - 4x + 3}$ og 0 þýðir að deilingin gekk upp. Sjá sýnidæmi hér að framan.

Sjáum nú annað dæmi, þar sem stuðladeiling er notuð.

Dæmi:

Deildu ($x - 3$) í $x^3 - 3x^2 - x + 3$ Sjá sýnidæmið hér á undan

$x - 3 = 0$ Stuðlarnir eru: 1, -3, -1, 3. $x = 3$

Deilingin verður þá svona:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & 3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \underline{0} \end{array}$$

a. 1 fer beint niður

b. 1 margfaldast með 3

c. Leggja saman -3 og 3

d. Endurtaka

Svarið er: $x^2 + 0x - 1$ eða $\underline{x^2 - 1}$ og deilingin gekk upp

Sjá dæmið hér að framan

Skoðum nú eitt sýnidæmi þar sem deilingin gengur ekki upp.

Dæmi:

Deildu ($x + 2$) í $x^3 - 3x^2 - x + 3$, sjá dæmið hér að framan. $x + 2 = 0$ Stuðlarnir eru: 1, -3, -1, 3. $x = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ \hline & & -2 & 10 & -18 \\ \hline & 1 & -5 & 9 & -15 \end{array}$$

a. 1 fer beint niður

b. 1 margfaldast með (-2)

c. Leggja saman -3 og -2

d. Endurtaka

Svarið er: $x^2 -5x +9$ og afgangurinn er -15. Þá gengur deilingin ekki upp. Sjá sýnidæmi hér að framan.

5.10.2 Leifareglan

Svo er til þriðja aðferðin til þess að deila sem er takmarkaðri en margliðu- og stuðladeilingin og það er leifareglan sem segir okkur ekki svarið við deilingunni heldur aðeins hver leifin = afgangurinn er. Eins og þú veist þá gengur deilingin aðeins upp, ef afgangurinn er = 0.

Segja má að við notum gildistöfluna til þess að deila. Skoðum nú hvernig þetta er gert. Við höfum skoðað jöfnuna: x3 - 3x2 - x +3 . Setjum hana nú inn í gildistöflu.

Dæmi:

Finndu með leifareglu hvaða lausnir eru til í deilingu fyrir jöfnuna:

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$

Deilingin gengur upp fyrir:

x = (-1), 1 og 3

x	$y = 2^x$	y
-2	$y = 2^{-2}$	0,25
-1	$y = 2^{-1}$	0,5
0	$y = 2^0$	1
1	$y = 2^1$	2
2	$y = 2^2$	3
3	$y = 2^3$	4

Þar sem kemur 0

út úr gildistöflunni. Þættirnir eru þá: (x + 1) (x - 1) (x - 3) = 0. Séu þeir margfaldaðir saman kemur út jafnan: $x^3 - x^2 - x + 3 = 0$

Segja má að erfitt sé að lýsa margliðudeilingu í texta sem þessum. Það er von mín að þú hafir skilið þetta allt saman.

5.11 Lokaorð

Í þessum kafla um að lesa hnitakerfið eru kynnt öll helstu hugtök sem nemandi á fyrsta ári í framhaldsskóla þarf að skilja og nota. Þetta eru ný og framandi hugtök sem hafa verið mismikið í umræðunni í grunnskólanum. Einnig má segja að stærðfræðihugtök séu ekki mikið í umræðunni hvorki í fjölmiðlum né á heimilum eða almennt í umræðunni í þjóðfélaginu. Hér eru kynnt nærri 60 hugtök sem tengjast jöfnum í hnitakerfinu. Hugtakalæsi er því mjög mikilvægt til þess að skilja og beita þeim. Það er von mín að þess kafli styðji þig til þess. Besta leiðin til þess að skilja er einmitt að lesa.

5.12 Hugtakaskrá

Almennt form fyrsta stigs jöfnu: $ax + bx + c = 0$

Almennt form annars stigs jöfnu: $ax^2 + bx + c = 0$

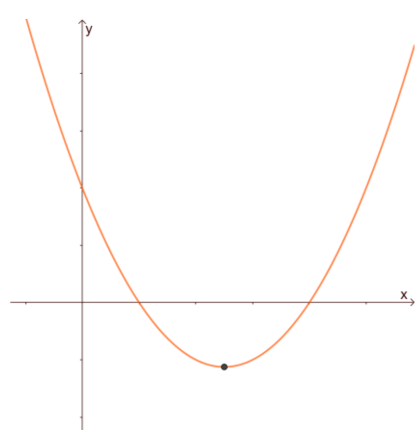
Andhverfa fallið: Fall sem speglast um línuna $y = x$

Bein lína: Bein lína í hnitakerfinu hefur alltaf jöfnuna: $y = hx + q$

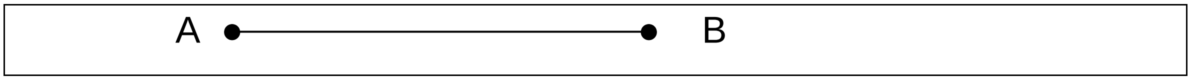
Biltákn: Tákn til að túlka bil á talnalínu. Lokað bil = [ ] og Opið bil =] [

Botnpunktur fleygboga: Neðsti punkturinn á ferli fleygbogans

-Mynd:



Endapunktur striks: Strik hefur upphafspunkt A og endapunkt B. Það er strikið AB

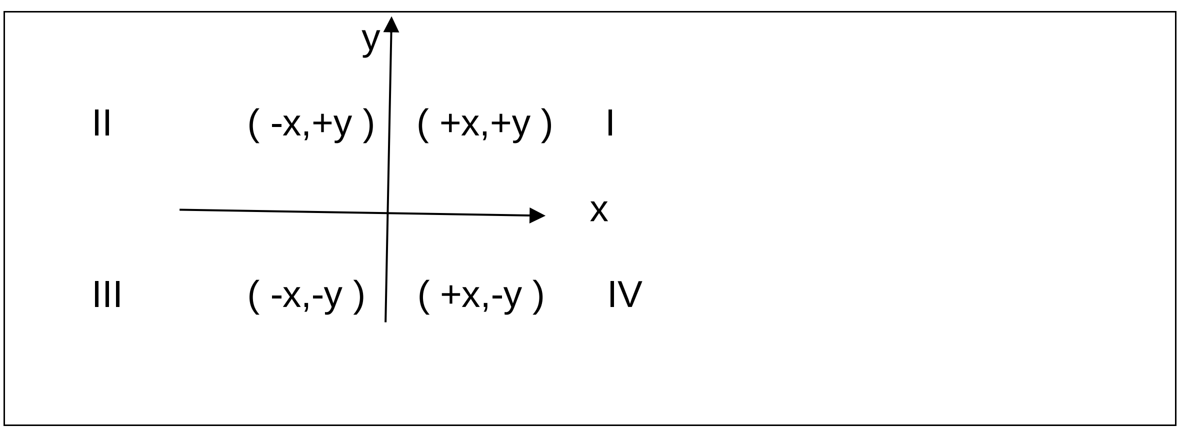


Fall: Fall er ferill / jafna í hnitakerfinu þar sem sérhvert x - gildi hefur aðeins eitt y - gildi

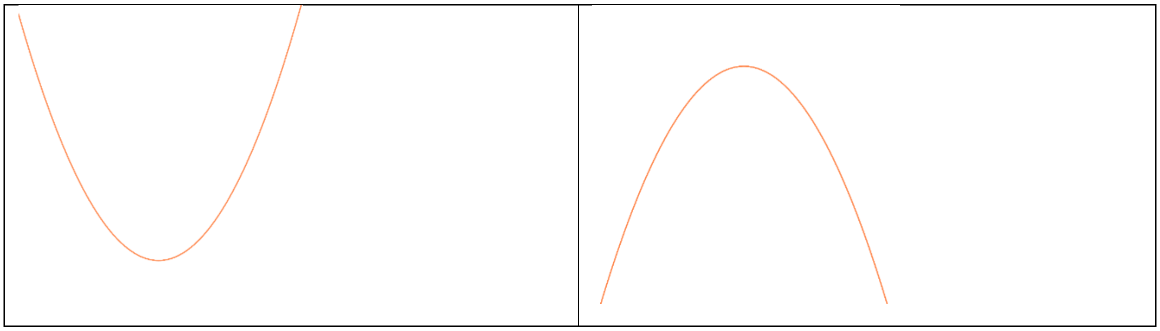
Ferill: Er birtingaform jöfnunnar í hnitakerfinu til dæmis: bein lína eða fleygbogi

Fjarlægðarformúlan: d = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ reiknar út fjarlægðina á milli tveggja punkta (x_1,y_1) og (x_2,y_2) í hnitakerfinu

Fjórðungar hnitakerfisins: Hnitakerfin er skipt í fjóra fjórðunga, sem eru númeraðir rangsælis: I, II, III og IV



Fleygbogi: Ferill annarsstigs jöfnunna $ax^2 + bx + c = 0$



Formengi: lýsir því hvað ferillinn notar mikið af x - ásnum. Skammstafað Ff = formengi fallsins

Formerki: + eða - fyrir framan ax^2 í jöfnunni $ax^2 + bx + c$ sýnir því hvernig fleygboginn snýr. $+ax^2 = \cup$ en $-ax^2 = \cap$

Fyrsta stigs jafna: Jafna beinnar línu: $y = hx + q$

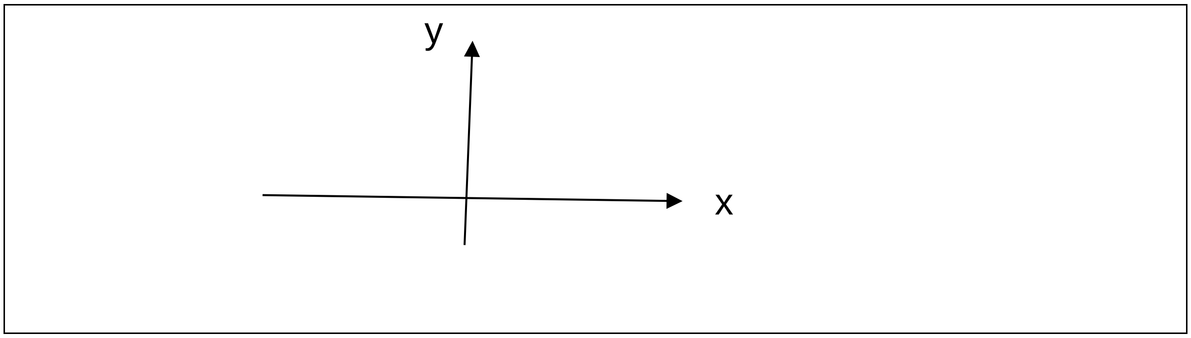
Gildistafla: Tafla sem umreiknar x yfir í y

x	y = 2x +1	y

Hallatala: Hallatala segir til um hvað halli línunnar breytist mikið á y - ás miðað við + eina einingu á x - ás í lesátt. $h = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

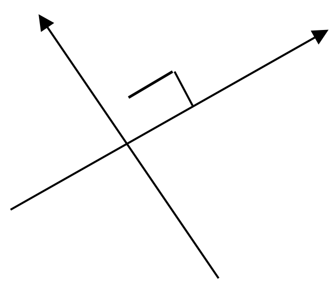
Hnit: Hnitapunktur (x,y), sem staðsetur punkt í hnitakerfinu, á x - ás og y - ás.

Hnitakerfi: Tvær talnalínur hornréttar hvor á aðra og skerast í 0 - punkti.



Hnitapunktur: Hnit (x,y), sem staðsetur punkt í hnitakerfinu

Hornréttar línur: Tvær línur, sem eru 90° hvor á aðra. Þá er: $h_1 \cdot h_2 = -1$



Jafna: Jafnan sýnir sambandið á milli x og y í hnitakerfinu

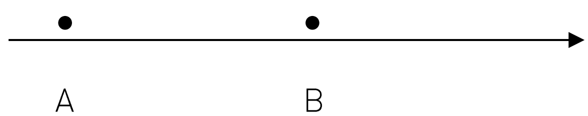
Jafna beinnar línu: Fyrsta stigs jafnan y = hx + q myndar beina línu í hnitakerfinu

Jafnstætt fall: Fall sem speglast um y - ásinn

Lárétt lína: Lína sem liggur hornrétt á x - ásinn og er samsíða y - ásnum

Leifareglan: Nota gildistöfluna í margliðudeilingu

Lokað bil: Bil sem hefur upphafspunkt og hefur endapunkt. Táknað [A,B]



Lárétta prófið: Lóðrétt lína dregin í gegn um feril og ef hann sker ferilinn aðeins einu inni þá er ferillinn fall

Lóðrétt lína: Lína sem liggur hornrétt á y - ásinn og samsíða x - ásnum

Miðpunktur: Miðpunktur striks AB sem er á milli A og B

Margliðudeiling: Að deila í jöfnu margliðu

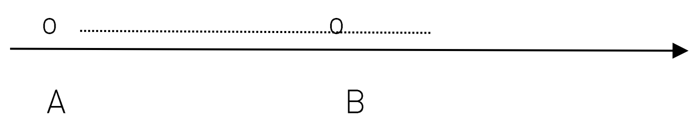
Miðpunktaformúlan: Reiknar út miðpunkt striks í hnitakerfinu

$$M_p = \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \quad , \quad \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

Niðursveigður fleygbogi: Fleygbogi sem opnast niður og hefur því topppunkt. ∩

Oddstætt fall: Fall sem myndar feril sem breytist ekki við 180° snúning

Opið bil: Bil sem hefur ekki upphafspunkt og hefur ekki endapunkt. Táknað] A, B [



Óendanlegt bil: Bil sem heldur áfram út í óendanleikann. Óendanleikinn er opið bil og táknað: ∞

Ójöfnutákn: Notuð til að tákna bil. $<$ $>$ $\leq$ $\geq$

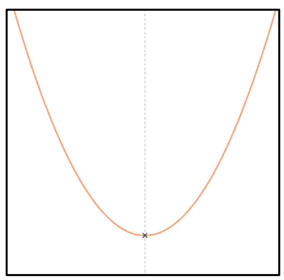
Punktur: Punktur í hnitakerfinu táknaður með (x,y)

Punkthallaformið: Jafna beinnar línu á forminu: $y - y_1 = h(x - x_1)$

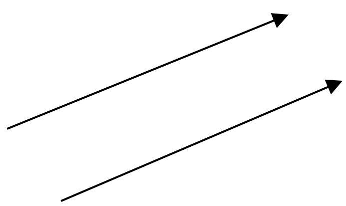
Rótarjafna: Jafna sem inniheldur kvaðratrót

Samhverfuás: Miðja fleygbogans = samhverfuás hans einnig kallaður spegilás.

Jafna samhverfuássins $x = \frac{-b}{2a}$ Reiknar út miðju fleygbogans

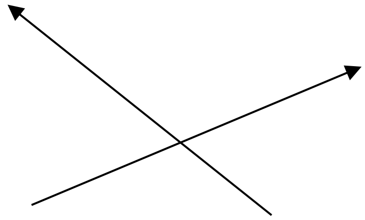


Samsíða línur: Línur sem hafa sömu hallatölu. $h_1 = h_2$

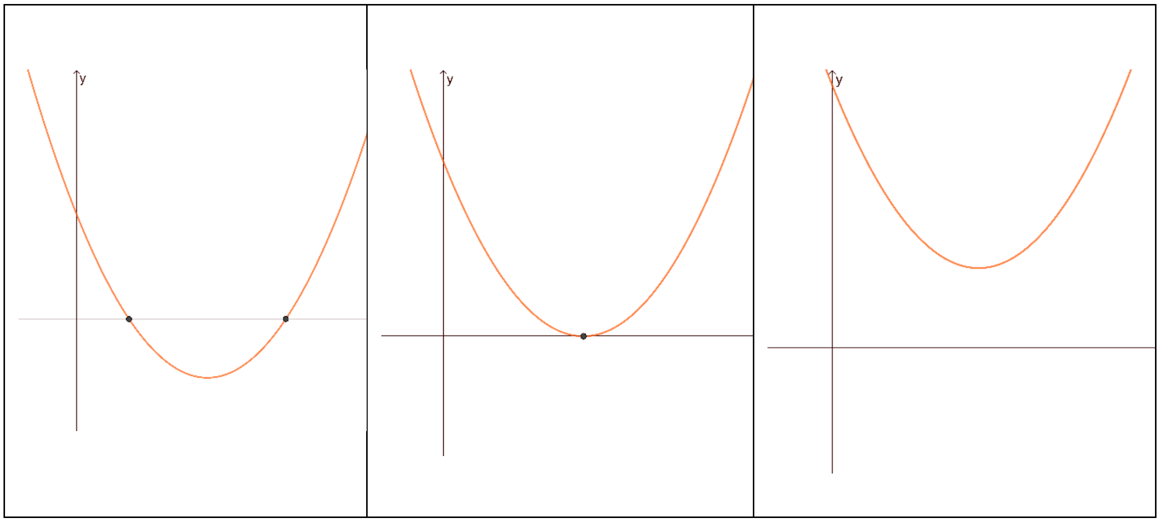


Skurðhalla formið: Jafna beinnar línu á forminu: $y = hx + q$

Skurðpunktur lína: tvær línur geta aðeins skorist í einum punkti í hnitakerfinu, nema þær séu samsíða



Skurðpunktar fleygbogans við x – ásinn: geta verið tveir, einn eða enginn

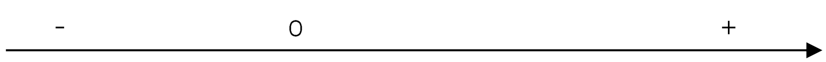


Skurðpunktur fleygbogans við y - ásinn: getur aðeins verið einn

Stuðladeiling: Að nota stuðla margliðunnar við deilingu

Stuðlar: Stuðlar margliðunnar: $x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ eru 1, 3, -2, 5.

Talnalína: Talnalína hefur núllpunkt, mínus tölur eru til vinstri og plústölur til hægri.



Topppunktur fleygbogans: Hæsti punktur fleygbogans, einnig kallað hágildi ∩

Upphafspunktur hnitakerfisins: Skurðpunktur x - ássins og y - ássins = (0,0)

Uppsveigður fleygbogi: Fleygbogi sem opnast upp og hefur því botnpunkt $\cup$

Varpmengi: Lýsir því hvað ferilinn notar mikið af y-ásnum. Skammstafað Vf = varpmengi fallsins

Veldisfall: Fall þar sem óþekkta stærðin x er veldisvísir. Dæmi: $f(x) = 2^x$

x - ás: Lárétti ás hnitakerfisins

y - ás: Lóðrétti ás hnitakerfisins