4.kafli: Að lesa prósentur og vexti

Nemendur mínir hafa sagt við mig: „Hver er tilgangurinn með því að læra algebru, rúmfræði eða hnitakerfið?“ Svo kemur setningin: „Ég á aldrei eftir að nota þessa stærðfræði“. Þá brosi ég fallega og segi: „jú í prófinu í fyrramálið“. Hér er lítið reglukerfi sem er hagnýtt og tengist töfraorðinu: „fjármálalæsi“, þ.e. að reikna út prósentur og vexti sem er einmitt mikilvægt í rekstri heimilis sem og fyrirtækja. Utan á einni búð hér í bæ stendur: „Allt að 80% afsláttur“. Er það gott fyrir mig? Á ég þá að versla þar? Þetta þarf allt að reikna út ekki satt?

4.1 Prósentur

Prósentur þýðir af 100 og hefur táknið % og er sérlega gott tæki til samanburðar og til þess að fylgjast með verðbreytingum, launahækkunum og fleira.

Prósenta = af 100

Dæmi:

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10\,\% = \frac{10}{100} = 0{,}10$$

$$25\,\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

$$50\,\% = \frac{50}{100} = 0{,}50$$

$80\,\% = \frac{80}{100} = 0{,}80$ **og svo framvegis**

4.1.1 Breytiþátturinn

Breytiþátturinn er prósentan $\div 100$ og þá breytist prósentan í tugabrot.

Dæmi:

$$2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}30$$

Þetta eru breytiþættirnir sem síðan eru notaðir til þess að reikna prósentuna t.d. í kr.

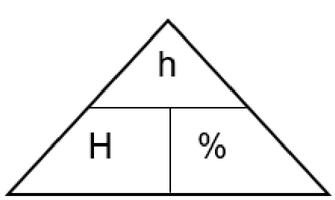
Prósentuformúlan lítur svona út:

$$\frac{H * p}{100} = h$$

þar sem H = heild = 100% stærðin í byrjun.

P = % = prósenta af 100 þessvegna er deilt með 100

Þessi formúla hefur þrjú andlit allt eftir því hvað þú vilt sjá. Það má túlka hana sem þennan skemmtilega þríhyrning:



Þú setur puttann yfir það sem þú ert að leita að.

sem sýnir okkur öll þrjú andlitin.

$h = \% * H$	**Finna hlutann**
$\% = {}^{h}/_{H}$	**Finna prósentuna**
$H = {}^{h}/_{\%}$	**Finna heildina**

Ef 20% af 500 = 100 þá er 20 = %, 500 = H = heild og 100 = h =hlutinn.

Dæmi:

1) Finna hlutinn:

$$\boxed{H \times \% = h}$$

$$h = 500 * 0{,}2$$

$$h = 100$$

2) Finna heildina:

$$\boxed{H = \frac{h}{\%}}$$

$$H = \frac{100}{0{,}2}$$

$$H = 500$$

3) Finna prósentuna:

$$\boxed{\% = \frac{h}{H}}$$

$$\% = \frac{100}{500}$$

$$\% = 0{,}20 \quad = 20\% = 0{,}20 \times 100$$

Hér koma svo örlítið þyngri dæmi:

Dæmi:

Hvað eru 29 % af 9.000 kr.?

h=H*%

h=9000*0,29

h=2.610 kr.

Dæmi:

Hve mörg prósent eru 750 af 8500?

$$\% = \frac{h}{H}$$

$$\% = \frac{750}{8500}$$

$$\% = 0{,}088$$

$$\% = 0{,}088 \times 100 = 8{,}8\%$$

Dæmi:

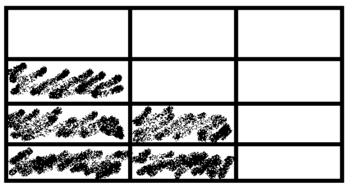
Hver er heildin ef 20% er 6500 kr?

$$H = \frac{h}{\%}$$

$$H = \frac{6500}{0{,}20}$$

$$H = 32500\ kr.$$

Dæmi:



Hve mörg prósent eru skyggð af myndinni?

$$\% = \frac{h}{H}$$

$$\% = \frac{5}{12} \quad = \quad 0{,}4166 \quad = \quad 41{,}66\%$$

Almennt brot	**Tugabrot**	**Prósenta**

4.1.2 Hækkun og lækkun

Skoðum nú ef um það er að ræða að vara hækkar eða lækkar í verði. Hægt er að plúsa (+) eða mínusa (-) í prósentunni eða + og – frá höfuðstólnum (heildinni) = 100

Skoðum létt dæmi fyrst:

Dæmi:

Vara sem kostar 100 kr hækkar um 20%, hvað kostar varan eftir hækkunina?

$h = H \times \%$

$h = 100 \times 0{,}20$

$h = 20\ kr$

Varan hækkar um 20 kr og kostar þá $100kr\ +\ 20\ kr\ = 120\ kr$.

Einnig hefði verið hægt að reikna hækkunina gegnum breytiþáttinn:

Dæmi:

Ef vara sem kostar 100 kr hækkar um 20% hvað kostar varan eftir hækkunina?

$$100\% + 20\% = 120\% = \frac{120\%}{100} = 1{,}20$$

$$100\text{kr} \times 1{,}20 = 120 \text{ kr.}$$

Tökum líka dæmi um prósentulækkun í vöruverði.

Dæmi:

Ef vara sem kostar 100 kr er lækkuð í verði um 20% hvað kostar varan eftir lækkunina?

$$h = H \times \%$$

$$h = 100 \times 0{,}20$$

$$h = 20\ kr$$

Varan lækkar um 20% og kostar þá $100\ kr - 20\ kr = 80kr$.

Einnig hefði verið hægt að reikna lækkunina í gegnum breytiþáttinn.

Dæmi:

Ef vara sem kostar 100 kr er lækkuð í verði um 20%. Hvað kostar varan eftir lækkunina?

$$100\% - 20\% = 80\% = \frac{80\%}{100\%} = 0{,}80$$

$$100\ kr \times 0{,}80 = 80\ kr.$$

Skoðum örlítið erfiðari dæmi:

Dæmi: **Vara sem kostar 5.500 kr hækkar um 25%. Hvað kostar varan eftir hækkunina?** $100\% + 25\% = 125\% = \frac{125\%}{100\%} = 1{,}25$ $5500 \times 1{,}25 = 6.875\ kr$ **Varan hefur þá hækkað um** $6875\ kr - 5500\ = 1.375\ kr.$ **Það hefði einnig mátt finna svona** $5500 \times 0{,}25 = 1.375\ kr.$
Dæmi: **Vara sem kostar 6.500 kr lækkar um 35%. Hvað kostar varan eftir lækkunina?** $100\% - 35\% = 65\% = \frac{65}{100} = 0{,}65$ $6500kr\ \times 0{,}65 = 4225\ kr.$ **Varan hefur lækkað um** $6.500kr - 4.225kr\ =\ 2.275kr.$ **Það hefði einnig mátt finna svona:** $6500 \times 0{,}35 = 2.275$

Nú erum við búin að skoða prósentuformúluna og breytiþáttinn, hækkanir og lækkanir. Nú skulum við skoða tvö prósentutrikk. Fyrst viljum við finna 100%, heildina ef þú veist hlutann og prósentuna. Það gerist einfaldlega með því að deila breytiþættinum.

Dæmi:

Að breyta 65% í 100%

$$\frac{65}{0,65} = 100\%$$

Peysa kostaði 4.000 kr eftir 40% lækkun. Hvað kostaði hún fyrir lækkunina?

$$100\% - 40\% = 60\% = \frac{60}{100} = 0,60$$

$$\frac{4000}{0,60} = 6.666,67\ kr.$$

Virðisaukaskattur er 24% og ef hann er lagður ofaná vöru verður vöruverðið $100\% + 24\% = 124\%$ og til þess að finna 100% þarf því að deila með 1,24.

Dæmi:

Peysa kostar 2.480 kr með 24% virðisaukaskatti. Hvað kostar peysan án vsk?

$$\frac{2.480}{1,24} = 2.000\ kr.$$

Dæmi:

Fasteignamat húseignar er 7.500.000 sem er 75% af söluverði eignarinnar. Hvert er söluverðið?

$$\frac{7.500.000}{0,75} = 10.000.000\ kr.$$

Hitt prósentutrikkið er að endurteknar prósentubreytingar eru ekki samlagning heldur margföldun, (margföldunarreglan).

Dæmi:

Ef vara hækkar fyrst um 10% og síðan um 15%. Hver er þá heildarhækkunin?

$$100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1{,}10.$$

$$100\% + 15\% = 115\% = \frac{115}{100} = 1{,}15$$

Þá margfaldar þú saman breytiþættina.

$$1{,}10 \times 1{,}15 = 1{,}265 \quad \Rightarrow 1{,}265 \times 100 = 126{,}5\%$$

Þá er heildarhækkunin $126{,}5\% - 100\% = 26{,}5\%$

Ástæðan fyrir því að ekki er nóg að leggja saman hækkanirnar. 10% + 15% = 25%, er sú að eftir 10% hækkunina leggjast 15% ofan á 110% ekki 100%.

Dæmi:

Vara kostar 5.000 kr, hún hækkar um 12%, síðan hækkar hún aftur um 15%, en lækkar svo um 7%. Hvað kostar hún eftir allar þessar breytingar?

$$100 + 12 = 112\% = 1{,}12$$

$$100 + 15 = 115\% = 1{,}15$$

$$100 - 7 = 93\% = 0{,}93$$

$$5000kr \ \times 1{,}12 \times 1{,}15 \times 0{,}93 = 5.989{,}20\ kr$$

Hve mikil var heildarprósentubreytingin?

$$1{,}12 \times 1{,}15\ x\ 0{,}93 = 1{,}1978$$

$$119{,}78\% - 100\% = 19{,}78\%$$

4.2 Prómill

Prómill þýðir af 1000 og hefur því grunntöluna 1000 en ekki 100 eins og prósentan og er táknað með ‰, en það er í raun eini stóri munurinn á kerfunum. Segja má að prómill reiknir þú eins og prósentuna.

Breytiþátturinn er sem hér segir:

Dæmi.

$$1‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$10‰ = \frac{10}{1000} = 0{,}010$$

$$250‰ = \frac{250}{1000} = 0{,}250$$

$$900‰ = \frac{900}{1000} = 0{,}900$$

Prómill-formúlan lítur svona út:

$\frac{H \times ‰}{1000} = h$	**H = heild** **‰ = af 1000** **h = hluti**

Það má líka túlka þessa formúlu eins og þríhyrning sem hefur þrjú andlit.

1) $h\ = H \times ‰$
2) $H = \frac{h}{‰}$
3) $‰ = \frac{h}{H}$

Dæmi: Vara kostar 1.000 kr og hækkar um $250\ ‰$. Hvað kostar hún þá? $h = H \times ‰$ $h = 1000 \times \frac{250}{1000} = 1000 \times 0{,}250 = 250\ kr.$ $1000 + 250 = 1.250\ kr.$
Dæmi: **Hve mörg prómill eru 250 kr af 1.000 kr?** $‰ = \frac{h}{H}$ $\qquad \frac{250}{1000} = 0{,}250 \times 1.000 = 250‰$
Dæmi: **250 kr eru 250‰. Hver er heildin?** $H = \frac{h}{‰}$ $H = \frac{250}{0{,}250} = 100\ kr.$

Segjum þetta gott um þá félaga prósentu og prómill. Að lokum þetta: einnig er hægt að nota . milljón = 1000000 sem grunntölu. Það er skammstafað ppm., (parts per million).

$$1\ ppm\ = \frac{1}{1000000} = 0{,}000001$$

4.3 Hlutföll

Hlutfall er dularfullt og ógegnstætt hugtak og ekki hafa nú allir mínir nemendur munað á prófi að:

Hlutfall = Deiling

Hlutfallið milli a og b = $\frac{a}{b}$

Hlutfallið milli b og a = $\frac{b}{a}$

$$\boxed{\frac{Fyrri\ talan\ fer\ upp\ á\ strik}{Seinni\ talan\ fer\ undir\ strik} = \frac{Nr\ 1}{Nr\ 2}}$$

Dæmi:

Flugfargjald kostar 25.000 kr en flugvallarskatturinn 3.000 kr. Hvert er hlutfallið á milli flugvallaskattsins og flugfaragjaldsins?

$$\frac{3000}{25000} = \frac{3}{25}$$

Sem líka má túlka sem prósentu = 0,12 = <u>12%</u>

Hlutfallajöfnur eru því deilingarjöfnur þar sem ein deiling er jöfn annarri deilingu t.d. bæði brotin eru <u>0,5.</u>

$$\boxed{\frac{1}{2} = \frac{3}{6}}$$

Dæmi:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{6}$$

$$2x = 1 \times 6$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Prófun

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{3}{6} = 0{,}5$$

Hlutfallajöfnur hafa einnig verið nefndar þríliður. Því þú þarft að vita þrjár tölur til þess að finna þá fjórðu.

Dæmi:

Í fyrirtæki einu hér í bæ er hlutfall karla og kvenna 4 : 6. Hve margir karlar vinna hjá fyrirtækinu ef konurnar eru 432.

$$\frac{Karlar}{Konur} = \frac{Karlar}{Konur}$$

Jafnan verður að vera rétt.

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{432}$$

Margfalda í kross

$$6x = 4432$$

$$6x = 1728$$

$$x = \frac{1728}{6}$$

$$x = 288$$

Prófun:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{288}{432} = \frac{2}{3}$$

Dæmið er rétt.

Dæmi:

Rúta keyrir 774 km á 9 klst. Hvað keyrir hún langt á 4 klst miðað við sama ökuhraða?

$$\frac{klst}{km} = \frac{klst}{km}$$

$$\frac{9\ klst}{774km} = \frac{4klst}{x\ km}$$

$$9x = 4 \times 774$$

$$9x = 3096$$

$$x = \frac{3096}{9}$$

$$x = 344\ km.$$

Prófun:

$$\frac{9}{774} = 0{,}0116279$$

$$\frac{4}{344} = 0{,}016279$$

Dæmið er <u>rétt</u>

4.4 Vextir

Segja má að vextir séu tímamæld prósenta. Þá þarf að kynna tímann til leiks.

1 vaxtaár/bankaár = 360 dagar

1 mánuður í banka er því = $\frac{360}{12} = 30$ **dagar**

Segja má að það sé ákveðin hagræðing í því að reikna vexti miðað við að allir mánuðir séu 30 dagar. Vaxtaformúlan er eins og prósentuformúlan nema inn í hana kemur tímaþátturinn.

$\frac{H \times \% \times t}{100} = V$	$H = heild = 100\%$ $\% = Af\ 100$ $t = tíminn = \frac{dagar}{360} = \frac{mán}{12}$ $V = vextir$

Dæmi:

Hvað færð þú mikið í vexti ef þú geymir 5.000 kr. í bankann í 6 mánuði og vextirnir eru 5%?

$$\boxed{H \times \% \times t = V}$$

$$\frac{5000 \times 5 \times 6}{100 \times 12} = V$$

$$V = 125kr$$

Þú átt þá $5000 + 125\ kr = 5.125\ kr.$

Snúum nú dæminu við:

Dæmi:

Hvað þarft þú að leggja mikið inn í bankann til þess að fá 125 kr. í vexti ef vextirnir eru 5% og vaxtatíminn 6 mánuðir?

$$\boxed{\frac{H \times \% \times m}{100 \times 12} = V}$$

$$H \times 0{,}05 \times \frac{6}{12} = 125$$

$$0{,}025H = 125$$

$$H = \frac{125}{0{,}025}$$

$$H = 5.000\ kr.$$

Einnig er hægt er að finna prósentuna og tímann á sama hátt.

4.5 Vaxtavextir

Í auglýsingunni sagði eftirminnilega: „Svo fæ ég vexti og vaxtavexti og vexti líka af þeim“. Ef þú ætlar að verða svona ríkur þá þarft þú að hafa peningana nokkur ár í bankanum og nýta þér veldareikninga. Þeir minna á margföldunarregluna: að endurteknar prósentubreytingar eru margföldun.

Formúlan lítur svona út:

$\boxed{F = H \times (1+P)^n}$	$F = framtíðaverð.$ $H = heildin, 100\%$ í $byrjun.$ $P = prósenta.$ $n = vaxtatímabil$ ár.

Dæmi:

Þú ferð með 5.000 kr í bankann núna. Hvað getur þú tekið út eftir 10 ár ef ársvextirnir eru 6 %?

$$\boxed{F = H \times (1+P)^n}$$

$$F = 5000 \times (1{,}06)^{10}$$

$$F = 5000 \times 1{,}790847697$$

$$F = 8954{,}24\ kr.$$

Þá hafa bæst við 5.000 krónurnar 3954,24 kr í vexti og vaxtavexti á 10 árum

Segja má að hægt sé að reikna aftur á bak með formúlunni (sjá næsta dæmi).

Dæmi:

Hvað þarft þú að leggja mikið inn í banka til þess að taka út 10.000 kr eftir 10 ár ef ársvextirnir er 7%?

$\boxed{F = H \times (1 + P)^n}$

$$10000 = H \times (1{,}07)^{10}$$

$$\frac{10000}{(1{,}07)^{10}} = H$$

$$H = \frac{10000}{1{,}967151357}$$

$$H = 5.083{,}49\ kr.$$

Andhverfan við $\times <\!-\!> \div$

Til að einangra H þarf $(1{,}07)^{10}$ að fara yfir og verða deiling.

Skoðum eitt tilbrigði í viðbót við formúluna, þ.e. þegar þú þarft að reikna út prósentu.

$\boxed{F = H \times (1 + P)^n}$

Dæmi:

Ef þú ferð með 5.000 kr. í bankann og tekur út 6.000 kr. eftir 2 ár, hve háir þurfa þá ársvextirnir að vera?

$$\boxed{F = H \times (1 + P)^n}$$

6.000 = 5.000 (1 + p)^2

Andhverfa margföldunar = deiling

$$\frac{6.000}{5.000} = x^2$$

$$x^2 = 1,2$$

$$x = \sqrt{1,2}$$

$$x = 1,095$$

x = 1,095 – 1,00 = 0,095 = 9,5%

Ég er þeirrar skoðunar að prósentu- og vaxtareikningur sé mjög hagnýtur. Þegar þú ferð að fá laun, taka lán, kaupa bíl eða fasteign, reka heimili eða fyrirtæki er gott að kunna þetta. Prósentu- og vaxtaumræða er mjög mikil í fjölmiðlum. Ég vona að þú hafir haft gagn og skilning af því að lesa um prósentur og vexti. Góða skemmtun í fjármálalæsi framtíðarinnar.

4.6 Hugtakaskrá

Breytiþáttur: Prósenta túlkuð sem tugabrot. $50\% = \frac{50}{100} = 0{,}50$

Hlutfall: Deiling. Hlutfallið á milli a og b. $\frac{a}{b}$

Hlutfallajafna: Deilingarjafna t.d. $\frac{1}{2} = \frac{x}{6}$

Margföldunarreglan: Endurteknar prósentubreytingar eru margföldun

Ppm: Parts per million. = milljón hlutar $\frac{1}{1000000} = 0{,}0000001$

Prómill:_ Af 1000, táknað ‰. $150\% = \frac{150}{1000} = 0{,}150$

Prósenta: Af 100, táknað % $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

Prósentuformúlan: $\frac{H \times \%}{100} = h$

Prósentuhækkun: $100\% + 20\% = 120\% = 1{,}2 = 20\%\ hækkun$

Vextir: Tímamæld prósenta

Vaxtaformúlan: $\frac{H \times \% \times t}{100} = V$

Vaxtavextir: $F = H \times (1 + P)^n$

Veldatakki: Á reiknivél x^y $eða$ x $eða$ $\wedge$