11.kafli Að lesa mengi

Í mengjafræðinni rekumst við á mjög framandi táknmál sem nánast lítur út eins og tákn úr geimnum. Segja má að dæmi og verkefni úr mengjafræðinni geri miklar kröfur um læsi á táknum, hugtökum og mengjamyndum. Best er að byrja á að skoða vel skilgreiningar, tákn og síðan beitingu hugtaka og reglna í sýnidæmum. Það er einmitt besta leiðin til þess að búa til skilninginn. Reyndar má segja að ekkert stærðfræðidæmi sé erfitt, ef þú veist hvernig á að leysa það.

11.1 Mengi

Mengjafræðin er hugtaka og táknasafn um 30 hugtaka og tákna. Byrjum bara á því að skoða þau. Mengi er hópur talna, hluta eða hugtaka sem eru vel skilgreind þannig að þú getir sagt til um það með 100% vissu hvort stakið sé íbúi í menginu eða ekki.

Dæmi:
Gefið er mengið A, fyrstu 10 heilu plús tölurnar:
A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9, 10 }
Ég get sagt til um það með 100% öryggi að {2, 7 } eru í menginu og að
{-4, 11, 15 } eru ekki íbúar í menginu A
Þá er A mengi

Ekki skiptir máli í hvaða röð stökin (íbúar mengisins) eru og einnig má endurtaka sama stakið án þess að það breyti neinu.

Dæmi:

Öll þessi mengi eru birtingaform mengisins A = { 1,2,3 } = { 3,2,1 } = { 2,3,1 } = { 1,2,2,2,3 } = A

Hugtakið „stak" þýðir íbúi í menginu og hefur sérstakt tákn ∈, einnig hefur hugtakið „ekki stak" sérstakt tákn sem er ∉.

Dæmi:

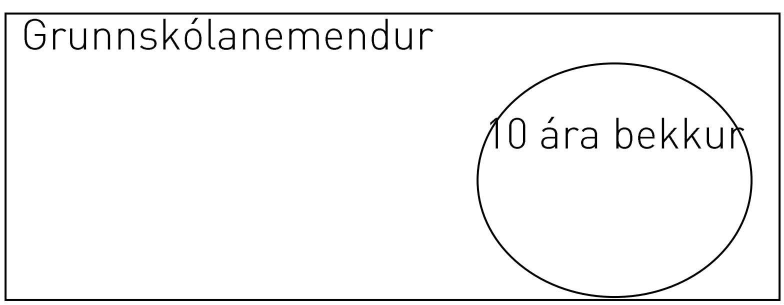
Gefið er mengið A = { 1,2,3,4,5 } og þá get ég sagt 2 ∈ A og einnig: 6 ∉ A.

Ef eitt mengi tilheyrir öðru stærra mengi, er sagt að það sé hlutmengi í stærra menginu og er táknað með tákninu c.

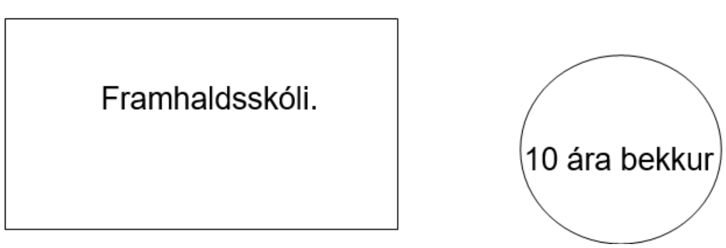
Dæmi:

10 - ára bekkur er hlutmengi í menginu grunnskólanemar.

10 - ára bekkur er c hlutmengi í menginu grunnskólanemar.



Einnig má segja að 10 ára - bekkur sé ekki í framhaldsskóla. Þá er 10 ára bekkur er ekki hlutmengi c í framhaldsskóla



Sagt er að mengi séu jöfn, ef þau innihalda sömu stök A = B.

Dæmi:

Eftirfarandi mengi eru jöfn. Röð og endurtekning skiptir ekki máli.

A = { 1,2,3 } = { 2,3,1 } = { 2,2,3,3,1,1 }

Tómamengi er mengi sem hefur enga íbúa. Það er táknað á tvo vegu { } og Ø.

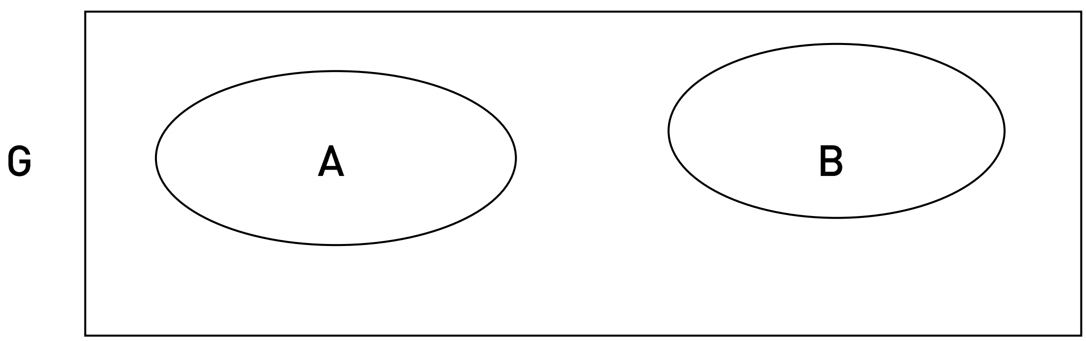
Dæmi:

Menn sem lifa á Mars = Ø. Engir menn lifa á Mars ennþá

Grunnmengi er bakmengið sem öll hlutmengin tilheyra.

Dæmi:

G = grunnmengi og A og B eru hlutmengi



Til er regla sem reiknar út hve mörg hlutmengi er hægt að búa til úr grunnmenginu þar sem n er fjöldi staka í hlutmenginu. Sérhvert mengi er einnig hlutmengi í sjálfum sér. Athugið að tómamengið er hlutmengi í öllum mengjum.

Fjöldi hlutmengja er = 2^n

Dæmi:

Hve mörg hlutmengi er hægt að búa til úr menginu A. A= { 1,2,3 }. Þá er hægt að búa til 2^3 = 8 hlutmengi. Þau eru: { 1,2,3 }, { 1,2 }, 1,3 }, { 2,3 }, { 1 }, { 2 }, { 3 } og Ø.

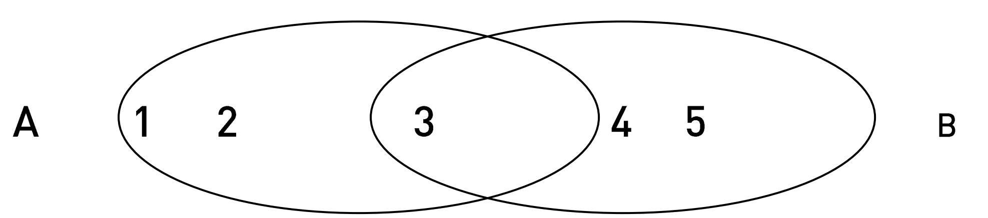
Dæmi:

Hve mörg hlutmengi er hægt að búa til úr menginu B = { 1,2,3,4,5 } Fjöldi hlutmengja er 2^n þar sem n = fjöldi staka í menginu. Fjöldi hlutmengja í B er því 2^5= 32 hlutmengi.

Með hugtökunum sammengi og sniðmengi erum við að fjalla um samskipti tveggja eða fleiri mengja. Sammengið hefur táknið U og er lesið "eða". A sam B = A U B verður í raun upptalning eða íbúaskrá fyrir þá sem búa í A eða B.

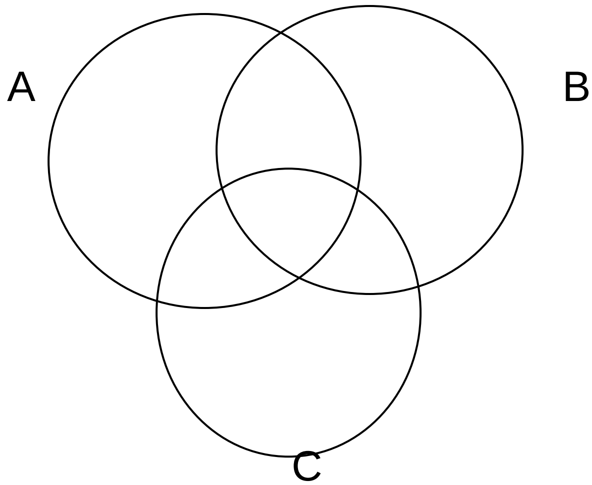
Dæmi:

Finndu A U B fyrir mengin A = { 1,2,3 } og B = { 3,4,5 }



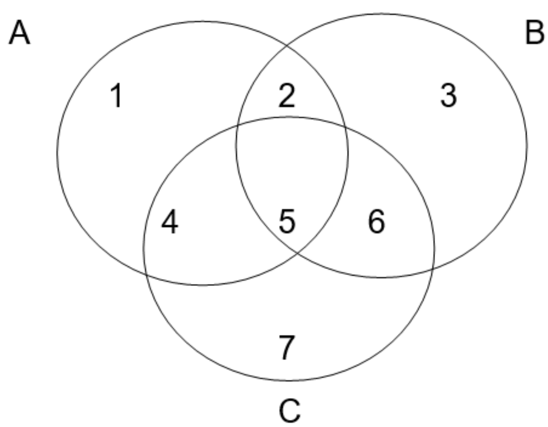
A U B = { 1,2,3,4,5 }

Séu mengin þrjú A, B og C þá er hægt að tala um A U B U C það eru öll stökin sem eru í A eða B eða C.



Dæmi:

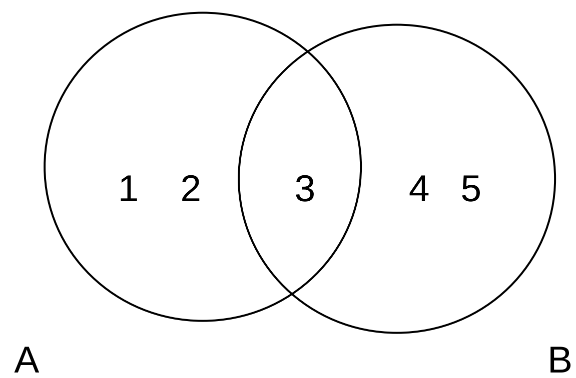
Finndu A U B U C ef A = { 1,2,4,5 }, B = { 2,3,5,6 } og C = { 4,5,5,7 }. Það er allir íbúar sem búa í A eða B eða C



A U B U C = { 1,2,3,4,5,6,7 }

Sniðmengi hefur táknið ∩ og er lesið "og" A snið B = A ∩ B = þau stök sem eru bæði í A og B.

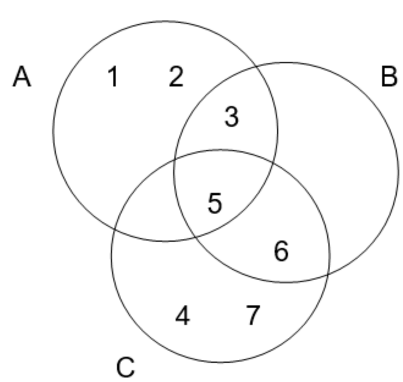
Dæmi: Finndu A ∩ B fyrir mengin A = { 1,2,3 } og B = { 3,4,5 }



A ∩ B = { 3 }.

Séu mengin þrjú A, B og C og finna á A ∩ B ∩ C, þá eru það stökin sem eru í A, B og C.

Dæmi: Finndu A ∩ B ∩ C, ef A = { 1,2,3,5 }, B = { 2,3,5,6 }, og C = { 4,5,6,7 }

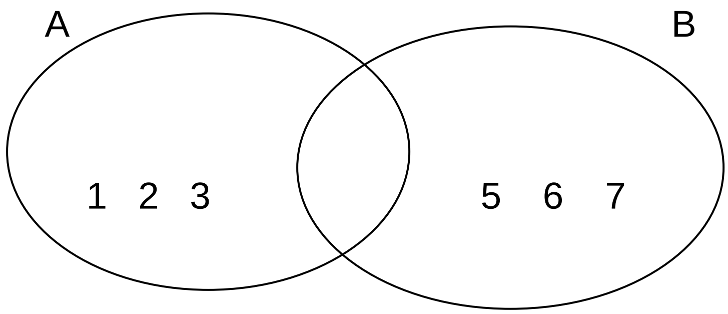


A ∩ B ∩ C = { 5 } sem er eina stakið sem tilheyrir A, B og C

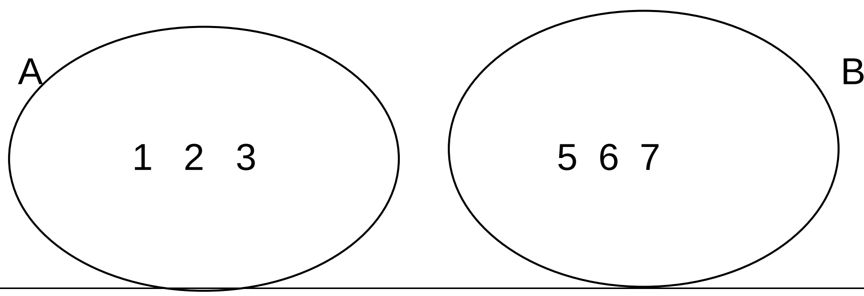
Sundurlæg mengi hafa engan sameiginlegan íbúa og má því segja að $A \neq B$.

Dæmi:

Aog B eru sundurlæg. A = { 1,2,3 } og B = { 5,6,7 }

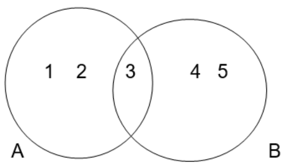


eða



Mengjamínus A mínus B er táknað A \ B sem þýðir að þú tekur öll stökin í B í burtu líka þau sem eru inni í A.

Dæmi: Finndu A \ B **A = { 1,2,3 } og B = { 3,4,5 }**

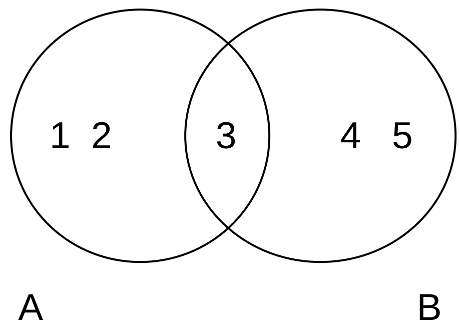


Þegar B mengið er dregið frá A verður eftir mengið A \ B = { 1,2 }

Frádráttur/mínus er ekki víxlin aðgerð, þ.e $A \setminus B \neq B \setminus A$

Dæmi:

Finndu $B \setminus A$ ef $A = \{1,2,3\}$ og $B = \{3,4,5\}$.

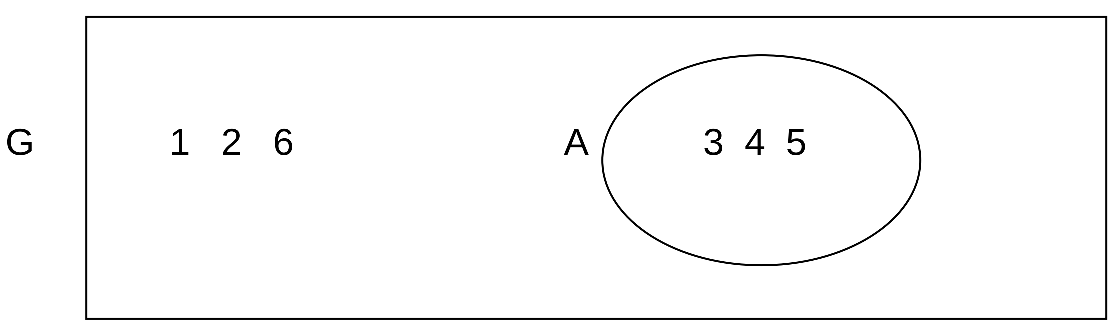


Þegar A er tekið burt verður eftir $B \setminus A = \{4,5\}$

Fyllimengi má kalla útmengi þ.e þeir sem eru ekki í A en eru í grunnmenginu það er þeir sem eru fyrir utan A. Það er táknað svona: $\bar{A}$.

Dæmi:

Finndu = $\bar{A}$. G = $\{1,2,3,4,5,6\}$ og $A = \{3,4,5\}$



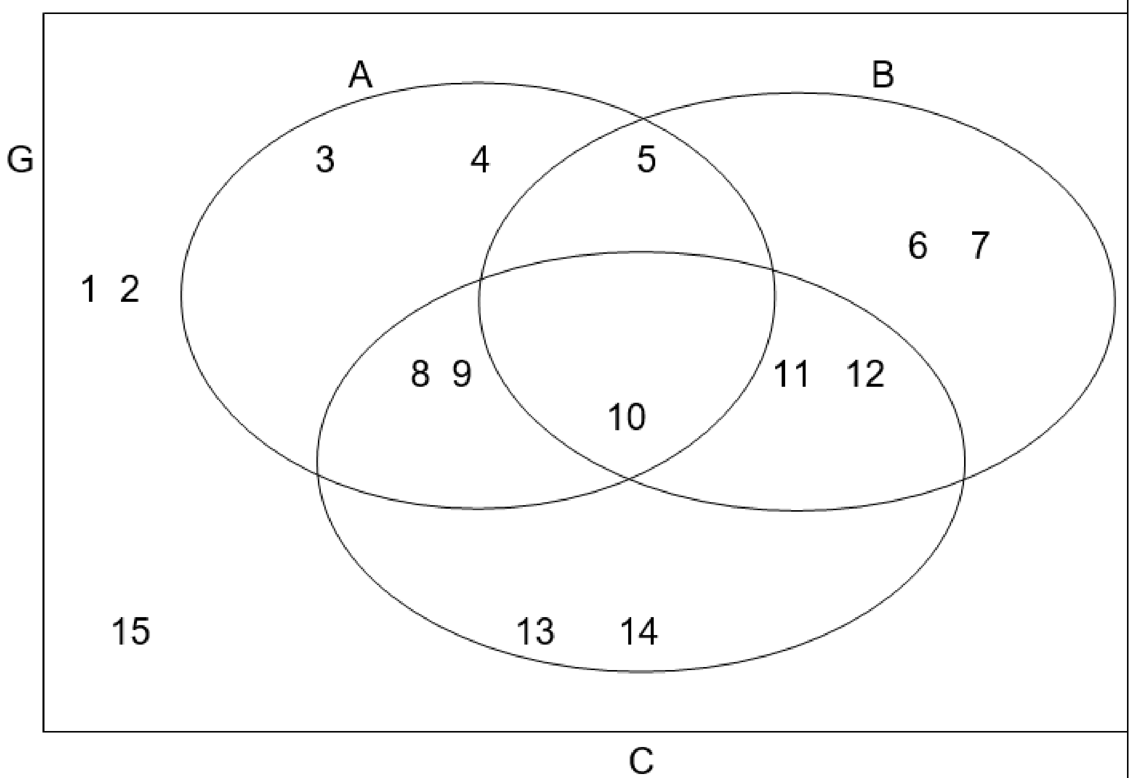
Þá er fyllimengið $\bar{A} = \{1,2,6\}$. = það sem ekki er í A

11.2 Vennmyndir

Vennmyndir eru einfaldlega mengjamyndir. Þær heita eftir breska stærðfræðingnum Venn. Gott getur verið að teikna upp mengamynd því þá fæst betra yfirlit yfir stöðu mengjanna.

Dæmi:

Þessi mynd gefur gleggri mynd af mengjunum heldur en upptalningn hér fyrir neðan.



G = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15 }

A={3,4,5,8,9,10}

B = { 5,6,7,10,11,12 }

C = { 8,9,10,11,12,13,14 }

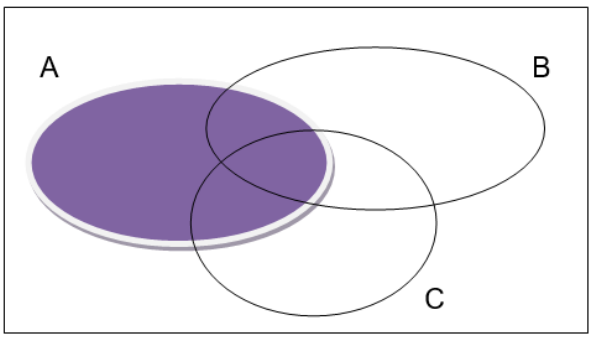
Hægt er að búa til flókin dæmi með mengjatáknum og vennmyndum. Skoðum nú eitt slíkt.

Dæmi:

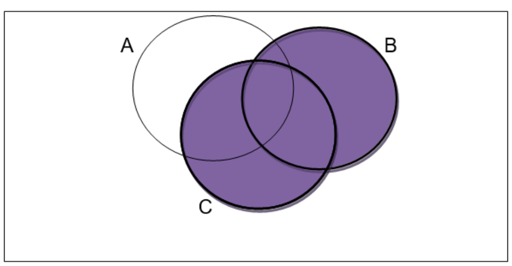
Teiknaðu vennmynd og skyggðu eftirfarandi svæði:

A ∩ (B ∪ C)

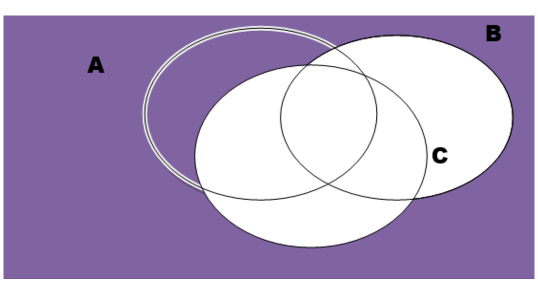
Skoðum fyrst mengið A.



Skoðum mengið (B ∪ C), lesa þarf svigann sérstaklega.

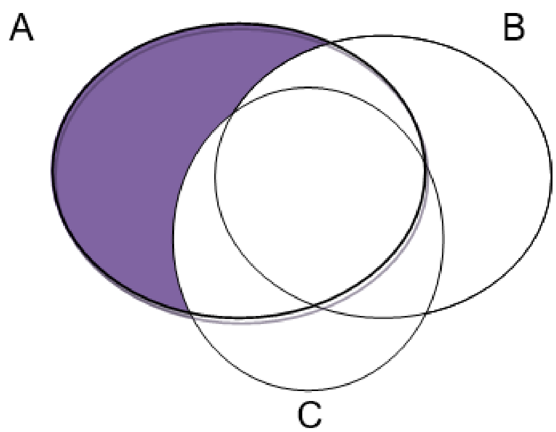


Skoðum svo (B ∪ C)´



Dæmi: Framhald.

Skoðum loks A ∩ (B ∪ C)´ Það sem er bæði í A og (B ∪ C)´



Ef táknin úr mengjafræðinni eru skrifuð upp í röð: { } ∅ ∈ ⊆ Ā ∪ ∩ / er ekki laust við að þetta líti út eins og skilaboð út úr geiminum. Hér reynir á táknlæsi með nýjum táknum sem ekki líkjast táknum sem við erum að nota annars staðar hvorki í lífinu né í stærðfræðinni. Hinsvegar má segja að það sé ekki erfitt að lesa ef þú ert læs.

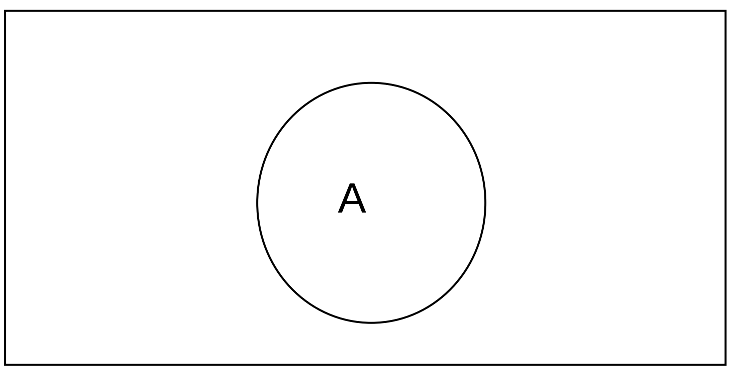
11.3 Hugtakaskrá

Ekki mengi: Ekki nægilega vel skilgreint safn talna, hluta eða hugtaka til þess að geta kallast mengi

Ekki stak: Táknað ϵ, ekki íbúi í menginu

Fjöldi hlutmengja: Fjöldi hlutmengja úr menginu er reiknaður með formúlunni 2^n, þar sem n er fjöldi staka í menginu

Fyllimengi: Táknað $\bar{A}$. Það eru þeir sem eru er ekki í A



Grunnmengi: Mengið sem hin mengin eru hlutmengi í

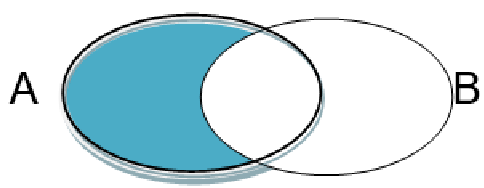
Hlutmengi: Táknað með $\subseteq$. A er hlutmengi í B. $A \subseteq B$

Jöfn mengi: A = B, í báðum mengjum eru sömu íbúar

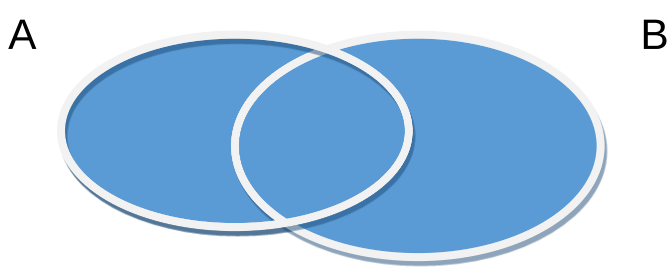
Íbúi: Íbúi mengisins. Líka kallað stak

Mengi: Skýrt afmarkað safn talna, hluta eða hugtaka

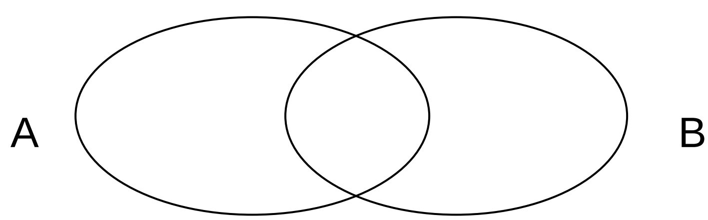
Mengja mínus: Táknað A \ B



Sammengi: Táknað A ∪ B. Þau stök sem eru annað hvort í A eða B

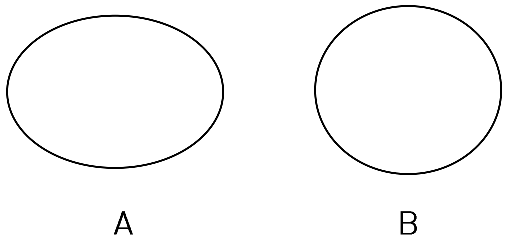


Sniðmengi: Táknað A ∩ B. Þau stök sem eru bæði í A og B



Stak: Táknað $\in$, íbúi í mengi. $2 \in A$. $A = \{ 2,3,4,5 \}$

Sundurlæg mengi: Mengi ekki með neinn sameiginlegan íbúa: $A \cap B = \emptyset$



Vennmyndir: Mengjamyndir