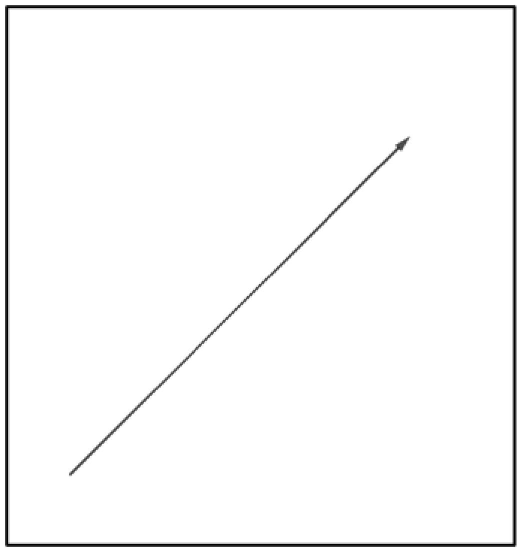
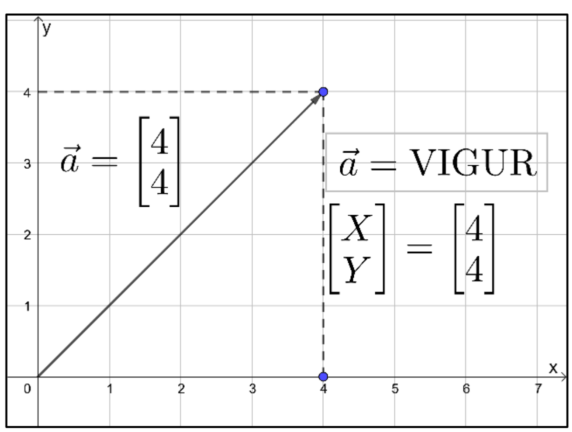
10.kafli: Að lesa vigra

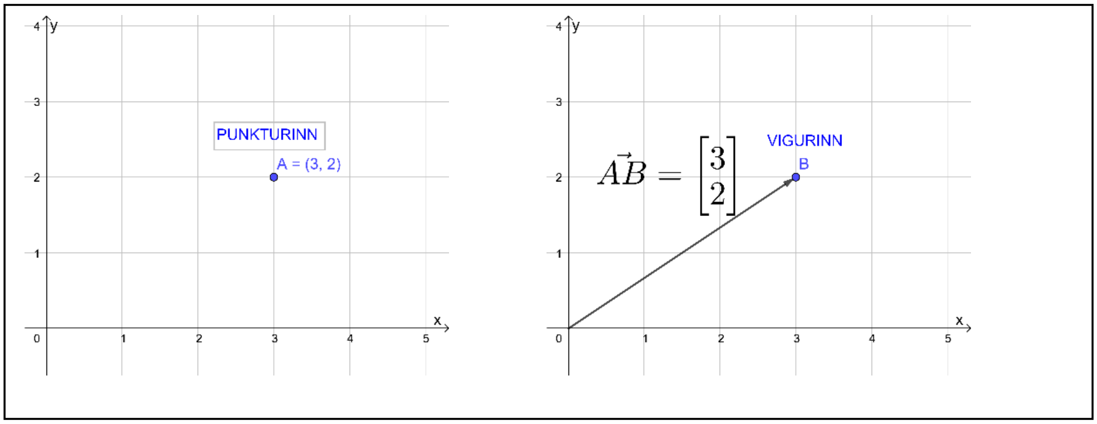
Ef ég teikna strik á blað þá hefur strikið lengd, halla og stefnu. Það er erfitt að mæla það svona eitt og sér.



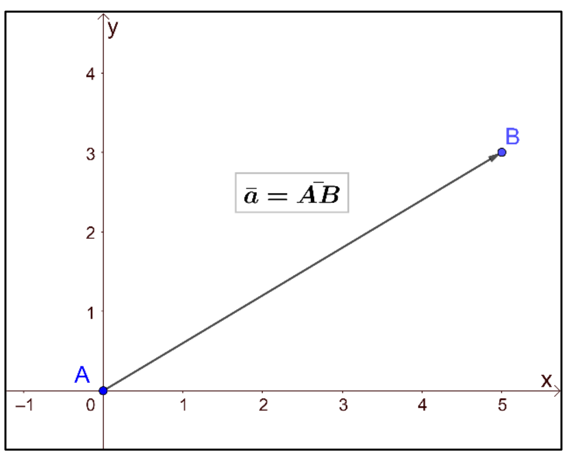
Því þarf að teikna strikið inn í hnitakerfi þá fær það upphafspunkt, endapunkt, lengd, stefnu og halla.



Punktur í hnitakerfinu hefur hnitið (x,y) = A. Ef um vigur er að ræða er hann hins vegar táknaður $\overline{\text{AB}} = \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Færsla á x} - \text{ás} \\ \text{Færsla á y} - \text{ás} \end{bmatrix}$



Vigur er því stefnubundið strik færsla frá einum punkti til annars. Vigur getur verið táknaður sem stefnubundið strik með upphafspunkt í A og endapunkt í B = $\overline{\text{AB}}$ eða bara vigurinn $\bar{\text{a}}$.



10.1 Að finna vigur á milli tveggja punkta

Hægt er að finna vigur sem er á milli tveggja punkta A og B.

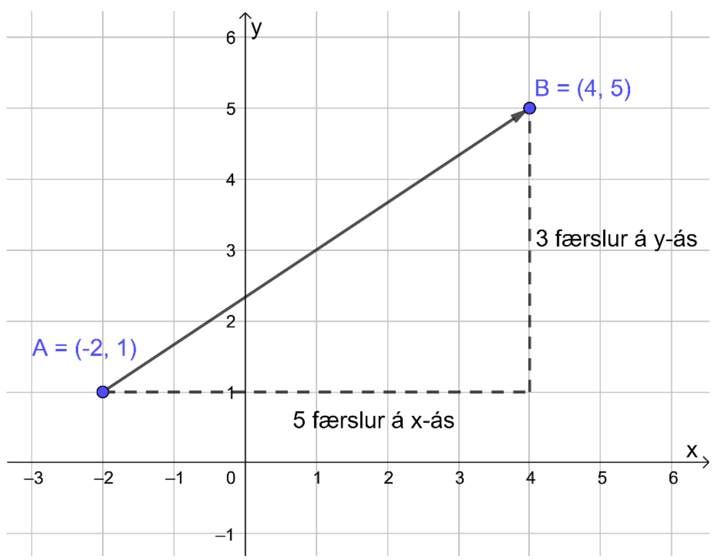
Dæmi:

Reiknaðu vigur sem hefur upphafspunktinn A = (-1,2) =

(x_1 , y_1) og B = (4, 5) = (x_2 , y_2)

Vigurinn $\bar{a}$ = $\overline{AB}$ hefur hnitin.

$\begin{bmatrix} x1 - x2 \\ y1 - y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - (-1) \\ 5 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{a}.$



Vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ er fimm færslur á x- ás og 3 á y - ás.

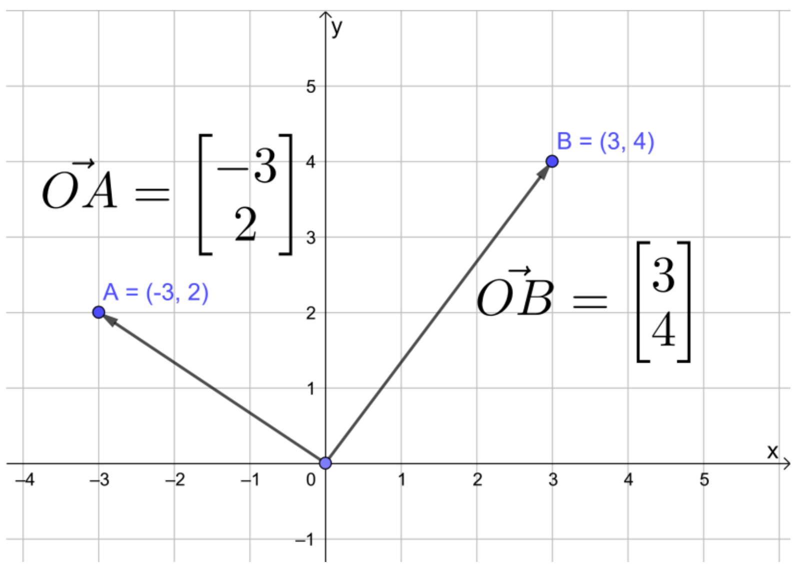
10.2 Staðarvigur og núllvigur

Vigur sem hefur upphafspunkt sinn í (0,0) í hnitakerfinu nefnist staðarvigur. Mjög gott er að byrja vigur í (0,0), því þá verða allar færslur svo skýrar.

-Dæmi.

Teiknaðu staðarvigur fyrir punktana A = (-3, 2) og B = (3,4).

$\overline{OA} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *og* $\overline{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

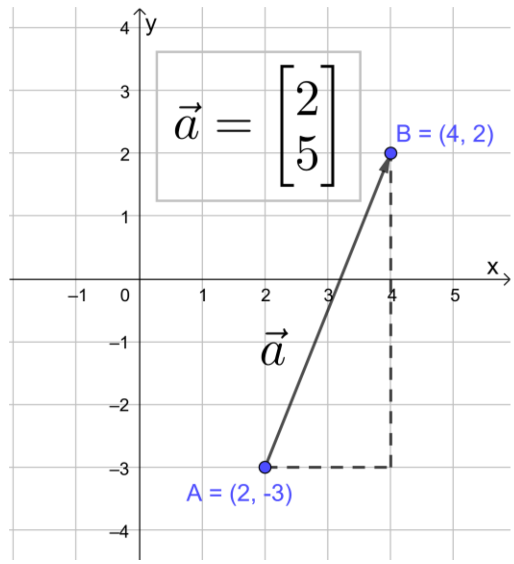


Það er mjög þægilegt að hugsa sér vigur sem byrjar í (0,0) í hnitakerfinu. Einnig er hægt að finna upphafspunkt eða endapunkt á vigra ef þú veist vigurinn $\bar{a}$ og annaðhvort upphafspunkt eða endapunkt hans.

Dæmi:

Gefinn er vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Upphafspunktur hans er A = (2 , -3). Finndu endapunkt hans

$\bar{a} = \begin{bmatrix} x2 - x1 \\ y2 - y1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 = x2 - 2 \\ 5 = y2 - (-3) \end{bmatrix}$



Leysa fyrir x_2	Leysa fyrir y_2
$2 = x_2 - 2$	$5 = y_2 - (-3)$
$2 + 2 = x_2$	$5 = y_2 + 3$
$4 = x_2$	$5 - 3 = y_2$
$x_2 = 4$	$2 = y_2$
	$y_2 = 2$

Endapunktur hans er (4,2) = B

Núllvigur er vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ þ.eþ núll færslur á x - ás og núll færslur á y - ás. Sagt er að núllvigurinn sé samsíða öllum vigrum og lengd hans er = 0.

10.3 Samlagning vigra

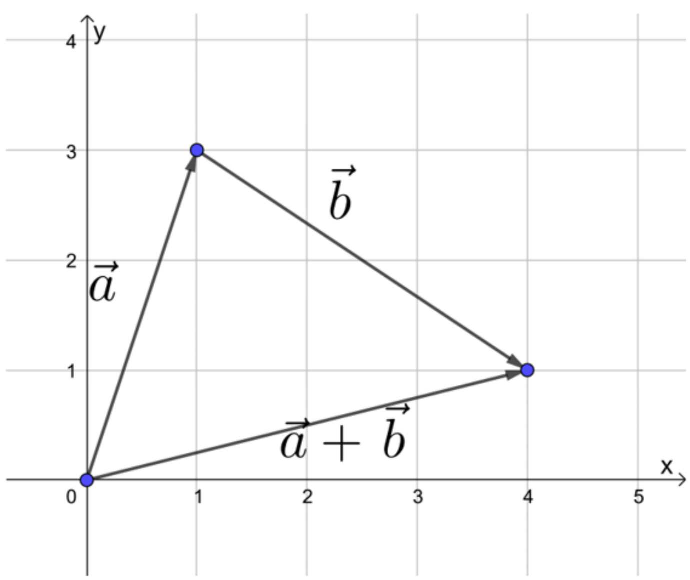
Þegar vigrar eru skoðaðir nánar sést að hægt er að leggja þá saman, lengja þá og stytta með margföldun, finna lengd þeirra með reglu Pýþagórasar og finna hallatölu þeirra. Þannig má ýmislegt gera þegar búið er að staðsetja vigurinn í hnitakerfinu. Lítum á samlagningu vigra. Þegar þú leggur saman tvo vigra leggur þú fyrst saman x - færslurnar og síðan y- færslurnar.

Regla: Fyrir vigrana $\bar{a} = \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}$ **og** $\bar{b} = \begin{bmatrix} x2 \\ y2 \end{bmatrix}$ **gildir:** $\bar{a} + \bar{b} = \begin{bmatrix} x1 + y2 \\ y1 + y2 \end{bmatrix}$

Dæmi:

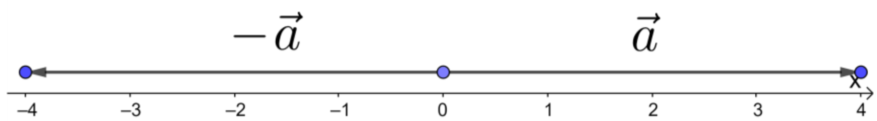
Leggðu saman vigrana $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\bar{a} + \bar{b} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Sjáum hvernig þetta lítur út á mynd.**



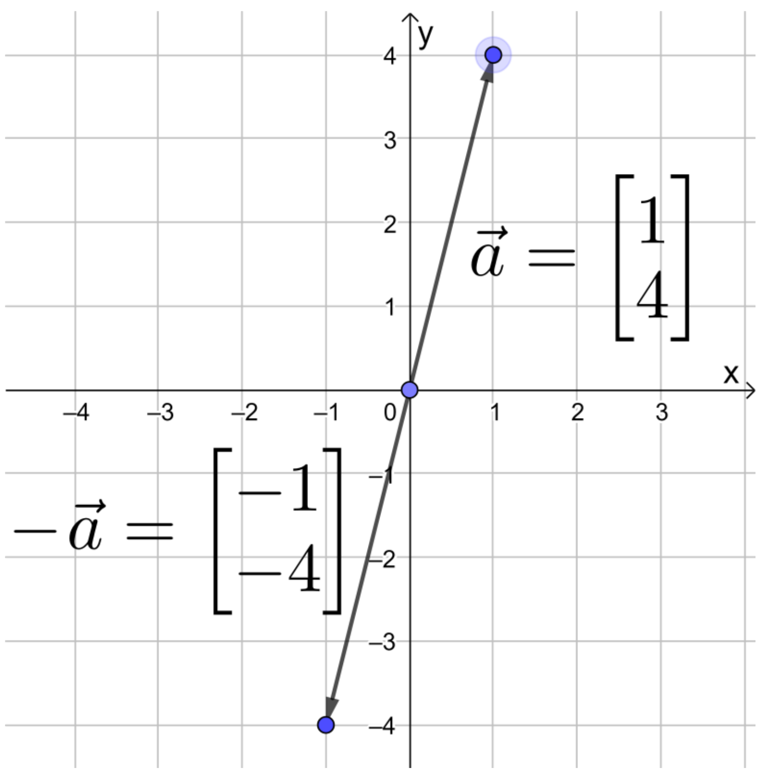
Skoðum nú frádrátt vigra. Segja má að + og - eru í gagnstæðar áttir. Munurinn á + og - vigra og + $\bar{a}$ og - $\bar{a}$ er eins nema stefnan er gagnstæð.

Talnalína:



Dæmi:

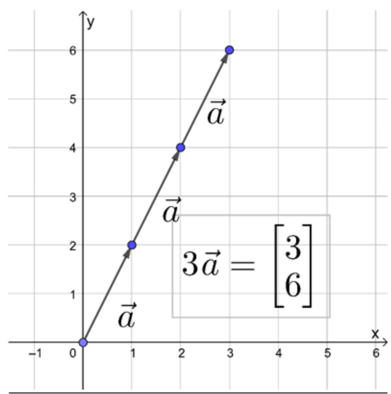
Teikna vigrana $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ og - $\bar{a}$ = - $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ inn í hnitakerfi.



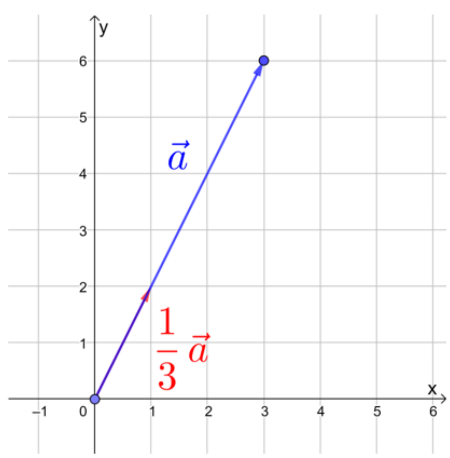
10.4 Margföldun og deiling vigra

Með margföldun lengist vigurinn, þ.e. ef hann er margfaldaður með tölu sem er stærri en 1,0. Hann styttist hins vegar ef hann er margfaldaður með tölu sem er minni en 1,0. Segja má að þá sért þú að deila í vigurinn og þá minnkar hann.

Dæmi: Margfaldið vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ með $3\bar{a} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ Þar af leiðir að $3\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.



Dæmi: Deila í vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ með 3. $\bar{a} / 3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} / 3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.



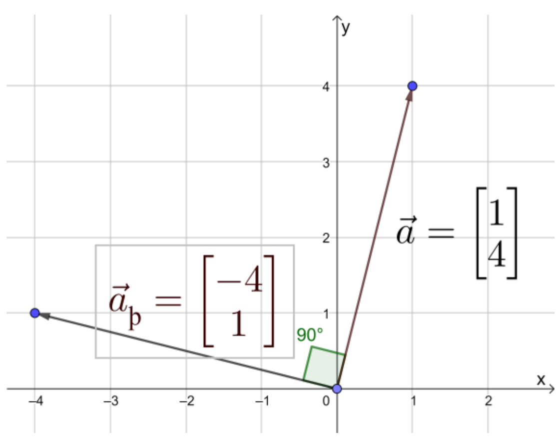
10.5 Þvervigur

Þvervigur fæst þegar vigri er snúið rangsælis um 90° í hnitakerfinu.

Regla: Fyrir vigurinn: $\bar{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ gildir: $\bar{a}$ þvervigur = $\bar{a}_þ = \begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$

Dæmi:

Hver er þvervigur fyrir vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Þá er $\bar{a}_þ = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.



10.6 Hallatala vigurs

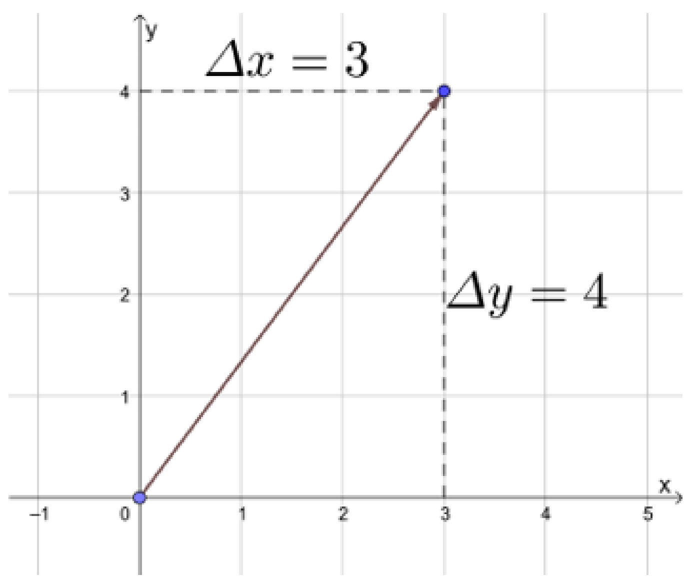
Skilgreiningin á hallatölu beinnar línu er h = Δy / Δx. Vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ og þú snýrð vigranum við $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ = hallatala vigursins $\bar{a}$.

Regla: Vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ hefur hallatöluna h = y / x.

Dæmi:

Finndu hallatölu vigursins $[a] = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Þá er hallatala hans h = 3/4 sem er Δy / Δx. Á einni einingu á x - ás fer vigurinn upp um 3 / 4 á y - ás.



Regla: Ef tvær línur eru samsíða þá hafa þær sömu hallatölu þá er $h_1 = h_2$

Dæmi:

Reiknaðu stærð z þannig að vigrarnir $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ z+1 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} z \\ 6 \end{bmatrix}$ verði samsíða.

Ef vigrarnir $\bar{a}$ og $\bar{b}$ eru samsíða þá er $h_1 = h_2$.

$h_1 = (z + 1) / 2$ og $h_2 = 6 / z$.

$\frac{z+1}{2} = \frac{6}{z}$ Margfalda í kross.

$12 = z (z + 1)$ þá er $12 = z^2 + z$ þá er $z^2 + z - 12 = 0$

Þátta: $(z - 3) (z + 4) = 0$

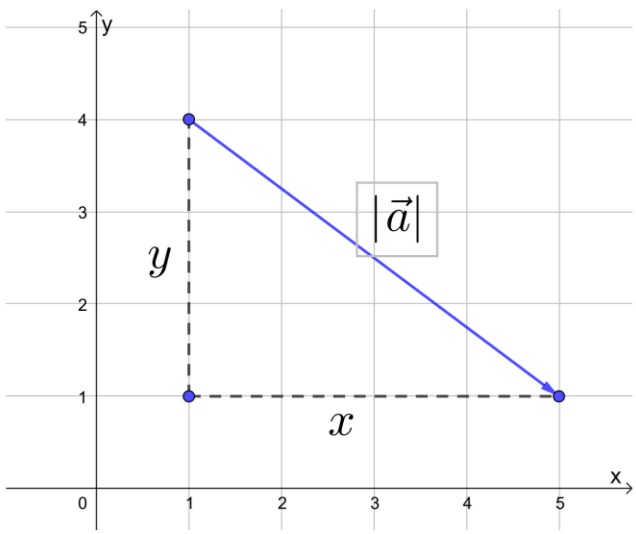
$z - 3 = 0$ og $z + 4 = 0$

$z = 3$ og $z = - 4$ Það eru tvær lausnir.

$\bar{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ eða $\bar{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$.

10.7 Lengd vigurs

Til þess að finna lengd vigurs notum við í raun Pýþagórasaregluna $a^2 + b^2 = c^2$. Vigur má alltaf túlka sem langhlið í 90° þríhyrningi.



x og y eru skammhliðarnar og $|\bar{a}|$ vigurinn er langhliðin

Þá lítur Pýþagórasarreglan $a^2 + b^2 = c^2$ út svona: $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Þegar við reiknum út lengd vigurs túlkast hann sem langhlið í 90° þríhyrningi.

Dæmi:

Reiknaðu lengd vigursins $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

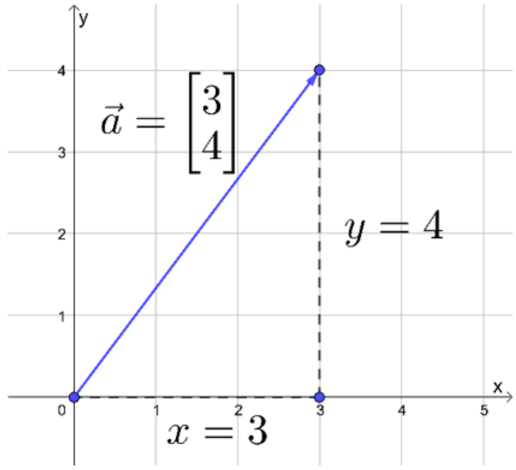
$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$|\bar{a}| = \sqrt{9 + 16}$

$|\bar{a}| = \sqrt{25}$

$|\bar{a}| = 5.$



Einnig er hægt að reikna út x eða y - færslu vigursins ef þú veist lengd hans.

Dæmi:

Reiknaðu út x - hnit vigursins $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ 4 \end{bmatrix}$ ef lengd hans er 5.

$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$5^2 = \sqrt{x^2 + 4^2}$

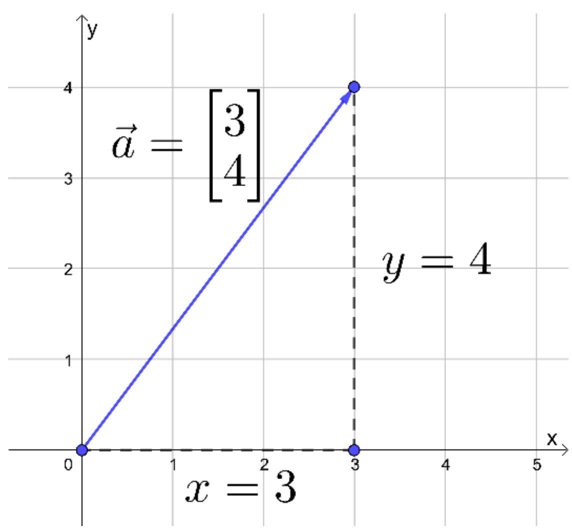
$25 = x^2 + 16$

$25 - 16 = x^2$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9}$ þá er $x = 3.$

$|\bar{a}| = 5.$



10.8 Einingavigur

Einingavigur hefur lengdina 1. **|ē|** = 1. Einingavigur hefur sömu stefnu og vigurinn **ā** ef **ā** er ekki núllvigur.

Regla:

Einingavigur er: $\bar{e} = \frac{1}{|a|} \cdot a$

Ef einingavigur er samsíða x - ás eða y - ás. hafa þeir hnitin i = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og j = $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dæmi:

Finndu hnit einingavigrs sem er samstefna vigrinum |a| = $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $\bar{a} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$

$|\bar{a}| = \sqrt{9 + 16}$

$|\bar{a}| = \sqrt{25}$

$|\bar{a}| = 5$

10.9 Innfeldi

Innfeldi vigra finnst með því að leggja margfeldi x-hnitanna tveggja vigra við margfeldi y-vigranna.

Regla: Ef $\bar{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ **þá er:** $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Þá kemur út tala sem segir til um það hvort hornið á milli vigranna sé minna en, stærra en eða = 90°.

Ef $\bar{a} \cdot \bar{b} > 0$ er hornið á milli vigranna hvasst, minna en 90

Ef $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ er hornið á milli vigranna hornrétt = 90°

Ef $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$ er hornið á milli viganna gleitt, stærra en 90°

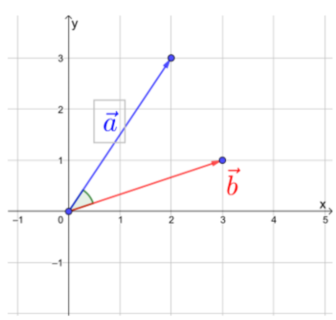
Dæmi:

Reiknaðu innfeldið á milli vigrana $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1$

þá fæst: $6 + 3 = 9$



Þá er hvasst horn á milli vigranna $\bar{a}$ og $\bar{b}$. (hornið er minna en 90°)

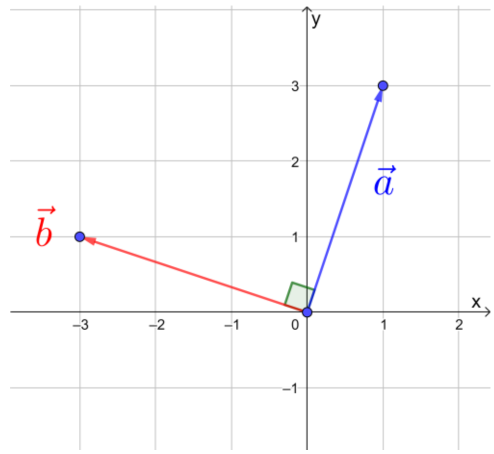
Dæmi:

Reiknaðu innfeldið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1$

þá er $-3 + 3 = 0$

Þá er vigrarnir hornrnréttir hvor á annan.



Dæmi:

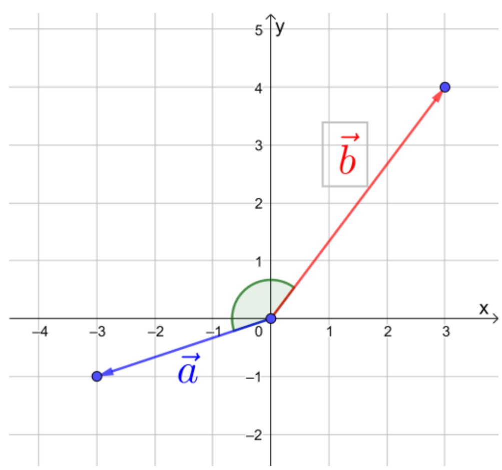
Reiknaðu innfeldið á milli vigranna $\bar{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = -3 \cdot 3 + -1 \cdot 4$

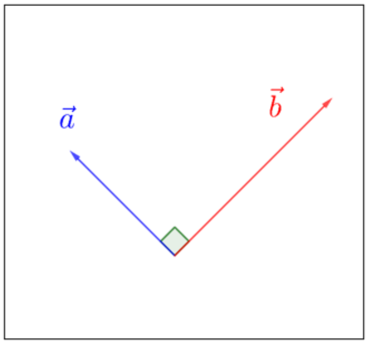
þá er $-9 + (-4) = -13$

Það er gleitt horn á milli vigranna.

(Hornið er stærra en 90°)



Ef innfeldi tveggja vektora = 0 þá eru vektorarnir hornréttir.



Dæmi:

Reiknaðu út hvaða gildi r þarf að taka til þess að vigrarnir

$\bar{a}$ = $\begin{bmatrix} -5 \\ 2r \end{bmatrix}$ **og** $\bar{b}$ = $\begin{bmatrix} 3+r \\ 5 \end{bmatrix}$ **séu hornréttir. Þá er innfeldið = 0.**

-5 · (3 + r) + 2r · 5 = 0

-15 - 5r + 10r = 0

-15 + 5 r = 0 **Þá er** $\bar{a}$ = $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ **og** $\bar{b}$ = $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

r = 3

$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

$\bar{a} \cdot \bar{b}$ **= -5 · 6 + 6 · 5 = 0**

Þá eru vigrarnir $\bar{a}$ **og** $\bar{b}$ **hornréttir.**

Vigrar virðast við fyrstu sýn vera frekar framandi stærðfræði. Ef betur er að gáð erum við þó að miklu leyti að notast við reglur sem við þekkjum eins og Pýþagóras, hallatölu beinnar línu og um hornréttar línur. Gott er að sjá vigra fyrir sér í hnitakerfinu því að þá er hægt að reikna þá út. Ég hvet þig til þess að lesa mjög vel.

10.10 Hugtakaskrá

Hallatala vigurs: ef vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ þá er hallatala hans $\cdot h = \frac{y}{x}$

Hnit vigurs: $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ er þá x - færslur eftir x - ás og y - færslur eftir y - ás

Hornréttir vigrar: Þeir mynda 90° horn hvor á annan. Þá verður innfeldi þeirra = 0

Innfeldi: Ef $\bar{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ þá er : innfeldið $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Lengd vigurs: Vigurinn $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ hefur lengdina: $|\bar{\bar{a}}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ = Pýþagóras

Núllvigur: $\bar{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Núllvigur hefur lengdina 0

Samlagning vigra: Leggja þarf saman x - færslur og y - færslur

$\bar{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ og $\bar{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ þá er: $\bar{a} + \bar{b} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

Samsíða vigrar: Vigrar eru samsíða ef þeir hafa sömu hallatölu

Staðavigur: Vigur sem byrjar í upphafspunkti hnitakerfisins (0,0)

Vigur: Stefnubundið strik í hnitakerfinu, sem hefur færslur eftir x - ás og eftir y - ás. $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$